第 19 卷 第 3 期
2001 年 9 月

空 气 动 力 学 学 报
ACTA AERODYNAMICA SINICA

Vol. 19 ,No. 3
Sep. ,2001

文章编号 :0258-1825 (2001) 03-0348-06

强迫耗散非线性发展方程与完全平方守恒格式

林万涛， 季仲贞， 王 斌
(中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室， 北京 100029)

摘要: 从描述大气和海洋运动的强迫耗散非线性发展方程出发，对强迫耗散非线性大气和海洋方程组显式差分格式的计算稳定性进行了分析，构造了一类强迫耗散非线性发展方程的显式准完全平方守恒差分格式。理论分析和数值试验证明，这类显式准完全平方守恒差分格式是计算稳定的，值得推广应用。

关键词: 强迫耗散非线性发展方程; 完全平方守恒差分格式; 准完全平方守恒差分格式; 计算稳定性

中图分类号: V211. 3 **文献标识码**: A

0 引 言

在中、长期数值天气预报和海流数值模拟中，对非线性大气海洋动力学方程组进行数值求解时使用最多的是有限差分格式，能否设计出长时间计算稳定的差分格式是一个关键性问题。对绝热或无耗散情况下的非线性发展方程，曾庆存、季仲贞、王斌[1~9]系统地研究了其计算稳定性并构造了计算稳定的隐式和显式完全平方守恒差分格式。然而，对于强迫耗散非线性发展方程，由于其本身的复杂性和困难性，如何构造长时间计算稳定的差分格式，到目前为止还是一个尚未解决的问题。李建平、丑纪范[10]研究了强迫耗散非线性发展方程的计算稳定性问题，给出了隐式差分格式计算准稳定的判据。但计算准稳定的判据在实际计算中很难有效利用，并且计算准稳定的格式不一定计算稳定。因此，探讨完全平方守恒格式是否同样适合强迫耗散非线性发展方程的数值计算就显得十分必要。本文对强迫耗散非线性发展方程显式差分格式的计算稳定性进行了分析，提出了准完全平方守恒的新概念，构造了计算稳定的定步长和变步长两种显式准完全平方守恒差分格式。

1 大气海洋发展方程的一般形式及显式差分格式

完整的强迫耗散非线性大气海洋方程组可化为 Hilbert 空间中如下等价的算子方程[10]

$$\frac{\partial F}{\partial t} + NF + LF = G \tag{1}$$

基金项目: 国家杰出青年科学基金项目(批准号:49825109);国家优秀重点实验室项目(批准号:40023001);国家自然科学基金项目(批准号:49975020)共同资助.
收稿日期:2000-06-01;修订日期:2000-12-25.
作者简介:林万涛(1962-),男,副研究员、博士,研究方向:数值天气预报、大气与海洋数值模拟以及计算地球流体力学.

' 1995-2004 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$F|_{t=0} = F_0 \tag{2}$$

其中 N 为反伴算子,L 为自共轭正算子,即

$$N = -N^*, \quad (NF, F) = 0 \tag{3}$$

$$L = L^*, \quad (LF, F) \geq 0 \tag{4}$$

式(4)中等号当且仅当 $\|F\| = 0$ 时成立。令

$$HF = NF + LF - G \tag{5}$$

则式(1)可写为

$$\frac{\partial F}{\partial t} + HF = 0 \tag{6}$$

在 (x, t) 空间布网 $(jh, n\tau)$,取空间步长为 h,时间步长为 τ。记离散函数

$$F(jh, n\tau) = F_j^n \tag{7}$$

定义两个网格函数 F, G 的内积为

$$(F, G) = \sum_j F_j G_j \Delta_j \tag{8}$$

其中 Δ_j 依赖于问题的维数可为 h, h^2 或 h^3。而函数 F 的范数取为

$$\|F\| = (F, F)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

于是可构造出相应于方程(6)的显式差分格式[4,5]

$$\frac{F_j^{n+1} - F_j^n}{\tau} = -AF_j^n - \varepsilon\tau BF_j^n \tag{10}$$

其中

$$AF_j^n = A_1 F_j^n + A_2 F_j^n - G_j^n \tag{11}$$

而 A_1 和 A_2 分别为相应于 N 和 L 的差分式。在 Hilbert 空间中的反对称算子在 R^n 空间中对应的就是反对称矩阵,而对称正算子对应的就是对称正矩阵。因此,A_1 是反对称矩阵,A_2 是对称正矩阵。B 为耗散算子,ε 可称为耗散系数或灵活性系数。只要适当选择 ε 和算子 B,即可达到使式(10)保持完全平方守恒的目的。

2　完全平方守恒差分格式的构造

2.1　定步长完全平方守恒差分格式的构造

式(10)可改写为 (以下略去下标)

$$F^{n+1} = F^n - \tau AF^n - \varepsilon\tau^2 BF^n \tag{12}$$

定义 1　若 $\|F^{n+1}\|^2 = \|F^n\|^2$,则称格式(12)为完全平方守恒格式。

定义 2　若 $\|F^{n+1}\|^2 = \|F^n\|^2 + C\tau(AF^n, F^n)$,则称格式(12)为准完全平方守恒格式,其中 C 为常数。

(12)式两边取范数的平方得

$$\|F^{n+1}\|^2 = \|F^n\|^2 - 2\tau(AF^n, F^n) + \tau^2\{\tau^2\|BF^n\|^2\varepsilon^2 - 2[(BF^n, F^n) - \tau(AF^n, F^n)]\varepsilon + \|AF^n\|^2\} \tag{13}$$

于是不难证明如下定理

© 1995-2004 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

定理 1 若成立关系式

$$\tau^2 \| BF^n \|^2 \varepsilon^2 - 2[(BF^n, F^n) - \tau(AF^n, F^n)]\varepsilon + \| AF^n \|^2 = 0 \tag{14}$$

则式(12)为显式准完全平方守恒差分格式。

定理 2 若关系式(14)成立,A 反对称,则式(12)为完全平方守恒差分格式。

定理 3 格式(12)计算稳定的充分条件是$(AF^n, F^n) \geq 0$,即 A 为正算子。

定理 4 若固定 τ,且 τ 满足 $2\sqrt{K_1 K_3} < 1$,则当 ε 取为

$$\varepsilon = \varepsilon_n = \frac{K_1}{1 - \tau K_2 + \sqrt{(1 - \tau K_2)^2 - \tau^2 K_1 K_3}} \tag{15}$$

时,格式(12)为定时间步长的显式准完全平方守恒差分格式,其中

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{\| AF^n \|^2}{(BF^n, F^n)} \\ K_2 = \dfrac{\| AF^n, BF^n \|}{(BF^n, F^n)} \\ K_3 = \dfrac{\| BF^n \|^2}{(BF^n, F^n)} \end{cases} \tag{16}$$

2.2 变步长完全平方守恒差分格式的构造

定理 5 若不固定 τ, B 为正算子,则当

$$K_1 < 2\varepsilon$$

以及

$$\tau = \tau_n = \frac{2 - \frac{1}{\varepsilon} K_1}{K_2 + \sqrt{K_2^2 + \varepsilon(2 - \frac{1}{\varepsilon} K_1) K_3}} \tag{17}$$

时,格式(12)为变时间步长的显式准完全平方守恒差分格式,其中 K_1, K_2 和 K_3 满足式(16)。

定理 6 假设 B 与 τ_n 无关,则当

$$\varepsilon = \varepsilon_n = \frac{K_0 + 1}{K_0} K_1 \tag{18}$$

时,由式(17)确定的 $\tau = \tau_n$ 达到极大值,即

$$\left(\frac{\partial \tau_n}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon = \varepsilon_n} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \tau_n}{\partial \varepsilon^2}\right)_{\varepsilon = \varepsilon_n} < 0 \tag{19}$$

其中,$K_0 = \dfrac{\sqrt{K_1 K_3}}{K_2}$,而 K_1, K_2 和 K_3 满足式(16)。

2.3 算子 B 的选取

在实际计算中,算子 B 一般选取如下形式

定理 7 在定理 4 中,若取

$$BF^n = \frac{A\tilde{F}^{n+1} - AF^n}{\tau} \tag{20}$$

则定理 4 成立,其中 $\tilde{F}^{n+1} = F^n - \tau AF^n$。

© 1995-2004 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

定理 8　在定理 5 中,若取

$$BF^{n+1} = \frac{\tilde{A}\tilde{F}^{n+1} - \tilde{A}F^{n}}{\tau} \tag{21}$$

则定理 5 成立,其中 $\tilde{F}^{n+1} = F^{n} - \tau\tilde{A}F^{n}$,　$\tilde{A}F^{n} = A_1 F^{n} + A_2 F^{n}$。

3　数值试验

为了进一步验证强迫耗散非线性发展方程与准完全平方守恒差分格式之间的关系,我们做如下数值试验。考虑一维强迫耗散非线性发展方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin 2\pi x,\quad 0 \le x \le 1,\quad 0 \le t < +\infty \tag{22}$$

$$u|_{t=0} = \cos 2\pi x \tag{23}$$

对方程(22)和(23),分别取如下显式准完全平方守恒差分格式

格式 1　(定时间步长显式准完全平方守恒差分格式)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n}}{\tau} = -Hu_j^{n} - \varepsilon B_1 u_j^{n} \tag{24}$$

其中

$$Hu_j^{n} = \frac{u_j^{n}}{h}(u_{j+1}^{n} - u_j^{n}) - \frac{1}{2h^2}(u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}) - \sin 2\pi jh$$

$$B_1 u_j^{n} = \frac{H\tilde{u}_j^{n+1} - Hu_j^{n}}{\tau}$$

其中 $\tilde{u}_j^{n+1} = u_j^{n} - \tau Hu_j^{n}$。$\varepsilon$ 取(15)式所表示的形式。取 $h = 0.01$, $\tau = 0.001$ 。

格式 2　(变时间步长显式准完全平方守恒差分格式)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n}}{\tau} = -Hu_j^{n} - \varepsilon\tau B_2 u_j^{n} \tag{25}$$

其中

$$Hu_j^{n} = \frac{u_j^{n}}{h}(u_{j+1}^{n} - u_j^{n}) - \frac{1}{2h^2}(u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n}) - \sin 2\pi jh$$

$$\tilde{H}u_j^{n} = \frac{u_j^{n}}{h}(u_{j+1}^{n} - u_j^{n}) - \frac{1}{2h^2}(u_{j+1}^{n} - 2u_j^{n} + u_{j-1}^{n})$$

$$B_2 u_j^{n} = \frac{\tilde{H}\tilde{u}_j^{n+1} - \tilde{H}u_j^{n}}{\tau}$$

其中 $\tilde{u}_j^{n+1} = u_j^{n} - \tau\tilde{H}u_j^{n}$。$\varepsilon$ 取式(18)所表示的形式,τ 取式(17)所表示的形式,$h = 0.01$ 。计算结果见图 1。

通过图 1 可以看出,格式 1 和格式 2 是计算稳定的,积分一段时间后,能量即不再增长。这说明格式 1 和格式 2 都具有良好的平方守恒性,适用于一维强迫耗散非线性发展方程的数值计算。但是格式 2 比格式 1 稍省计算时间。

© 1995-2004 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

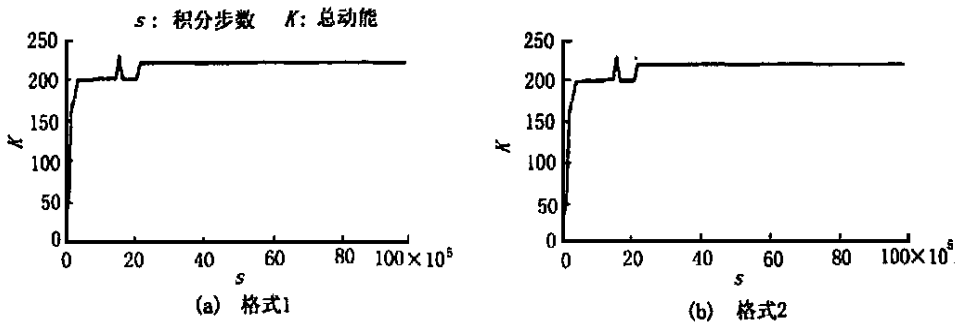

图 1 格式 1、2 的计算结果

Fig. 1 Computational results of schemes 1 and 2

4 结 论

通过理论分析与数值试验,我们可以得出如下结论

(1) 在考虑大气和海洋系统的短期运动时,绝热和无粘近似是合适的。此时可以把大气和海洋系统看成是绝热无耗散的非线性系统,完全平方守恒等价于能量守恒。因此用完全平方守恒格式对其进行数值求解是适用的,所得到的数值解即是系统真解的近似。

(2) 只要耗散系数和耗散算子选择合适,在用准完全平方守恒格式数值模拟大气和海洋系统的长期运动时,差分格式是计算稳定的。这说明准完全平方守恒格式同样适用于强迫耗散非线性发展方程的数值计算。

参 考 文 献:

[1] 曾庆存. 计算稳定性的若干问题[J]. 大气科学, 1978, 2(3): 181-191.

[2] 曾庆存,季仲贞. 发展方程的计算稳定性问题[J]. 计算数学, 1981, 3(1): 79-86.

[3] 季仲贞. 非线性计算稳定性的比较分析[J]. 大气科学, 1981, 4(4): 344-354.

[4] 季仲贞,王斌. 再论发展方程差分格式的构造和应用[J]. 大气科学, 1991, 15(2): 72-78.

[5] 王 斌,季仲贞. 显式完全平方守恒差分格式的构造及其初步检验[J]. 科学通报, 1990, 35(10): 766-768.

[6] 王 斌,季仲贞. 协调耗散算子与显式完全平方守恒差分格式[J]. 中国科学, B 辑, 1993, 23(6): 665-672.

[7] 王 斌,曾庆存,季仲贞. 平方守恒系统与 Hamilton 系统[J]. 中国科学, A 辑, 1995, 25(7): 765-770.

[8] WANG BIN, JI ZHONG-ZHEN. A class of explicit forward time-difference square conservative schemes[J]. *ACTA MECHANICA SINICA*, 1995, 11(1): 8-14.

[9] 王 斌,季仲贞. 变步长显式完全平方守恒差分格式[J]. 气象学报, 1995, 53(3): 299-305.

[10] 李建平,丑纪范. 强迫耗散非线性大气方程的计算稳定性[J]. 科学通报, 1999, 44(2): 214-216.

© 1995-2004 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

Forced dissipative nonlinear evolution equation and complete square conservative difference scheme

LIN Wan-tao, JI Zhong-zhen, WANG Bin

(State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China)

Abstract: Based on the forced dissipative nonlinear evolution equations for describing the motion of atmosphere and ocean, the computational stability of the explicit difference scheme of the forced dissipative nonlinear atmospheric and oceanic equations is analyzed and the computationally stable explicit quasi-complete square conservative difference scheme is constructed. The theoretical analysis and numerical experiment prove that the explicit quasi-complete square conservative difference scheme is computationally stable and deserves to be disseminated.

Key words: forced dissipative nonlinear evolution equation; complete square conservative difference scheme; quasi-complete square conservative difference scheme; computational stability

© 1995-2004 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.