

[文章编号] 1001-246X(2001)04-0289-09

大气动力学方程的 Hamilton 算法

王 斌¹, 季仲贞¹, 肖庆农²

(1. 中国科学院大气物理研究所 LASG, 北京 100029; 2. 佛罗里达州立大学气象系)

[摘 要] 将大气动力学方程组写成正则算子方程的形式,通过引入泊松括号,并利用原方程组的无穷个不变量,深入研究其 Hamilton 性质,在忽略摩擦和外源强迫的情况下,证明了大气动力体系是一个 Hamilton 系统,从而构造出求解它的辛算法,并用数值试验检验了该算法.

[关键词] 大气动力学方程; Hamilton 系统; 辛格式

[中图分类号] P401 [文献标识码] A

0 引言

一切守恒的物理过程都能表达成 Hamilton 体系,忽略耗散和外源强迫的大气运动过程就是典型的例子. 辛几何构成了它们共同的数学框架,其理论及应用正在日益发展,并在实践中发挥着越来越重要的作用.

将辛几何应用于数值分析是冯康于 1984 年在北京召开的双微会议上首次提出的^[1],其主要理论依据是分析力学中的基本定理:系统的解是一个单参数的保测变换. 后来经过不断的完善,它已发展成为人们熟知的辛几何算法^[1~3]——Hamilton 力学计算的一种新方法.

时至今日,辛几何算法不仅在常微(有限维)情形已有比较系统和完善的理论,而且对偏微(无限维)情形也取得了很大的进展^[4~7]. 但对于诸如大气海洋这样的非线性复杂系统,却很少有人去作深入的研究. 为了弥补这方面的缺陷,王斌等针对大气动力学方程就线性情形作了仔细的探讨,建立起辛算子法理论^[8],从而首次为辛几何算法应用于大气海洋数值模拟架起了桥梁.

在本文中,我们将深入研究非线性情形大气系统的 Hamilton 性质,并设计求解非线性正压大气体系的辛算法.

1 球面正压浅水波方程的 Hamilton 性质

相对于地球的半径来说,我们赖以生存的大气可以说是薄薄的一层. 因此,采用球面正压浅水波方程可以近似地描述大气的大尺度运动,可以抓住大气运动的重要特征和性质. 大气体系虽是一个有摩擦和外源强迫影响的耗散体系,但从整体来说,其惯性运动起着主导作用. 因此,用计算机模拟大气运动时,首先应该很好地抓住惯性运动的重要特征. 否则,如果模拟的惯性体系被歪曲,那些体现强迫和耗散的物理过程即使被描述得再精细也将于事无补. 为此,本文专门针对大气的惯性运动进行仔细研究,发展有效的数值方法.

考虑球面正压浅水波方程(忽略摩擦和外源强迫的作用):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \\ \quad (2 \sin \phi + \frac{u}{a} \tan \phi) v = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \\ \quad (2 \sin \phi + \frac{u}{a} \tan \phi) u = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial u \phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v \cos \phi}{\partial \lambda} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

其中 u, v 分别为纬向风(东西风)和经向风(南北

[收稿日期] 2000 - 06 - 05; [修回日期] 2000 - 08 - 28

[基金项目] 国家自然科学基金(49775268)、国家重点基础研究发展规划(973)项目(G1999032801)、国家优秀重点实验室专项基金(49823002)和大气所重点创新课题(8-1205)资助项目

[作者简介] 王斌(1962-),男,湖南,研究员,博士,从事气候数值模拟方面的研究.

风), ϕ 为位势高度, 和 分别为经度和纬度, t 为时间变量, a 和 分别为地球半径和旋转角速度. 方程的定义域为:

$$t \geq 0; \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \lambda \leq 2\pi, \\ -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2 \end{array} \right\}. \quad (2)$$

在南北方向, 对 v 采用齐次边界条件:

$$v(\lambda, -\pi/2, t) = v(\lambda, \pi/2, t) = 0. \quad (3)$$

而在东西方向, 采用自然周期边界条件:

$$\begin{cases} u(\lambda + 2\pi, \phi, t) = u(\lambda, \phi, t), \\ v(\lambda + 2\pi, \phi, t) = v(\lambda, \phi, t), \\ \phi(\lambda + 2\pi, \phi, t) = \phi(\lambda, \phi, t). \end{cases} \quad (4)$$

为了研究方便, 我们将方程 (1) 写成如下等价形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \phi \right] - \\ (\phi_v) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \phi \right] + \\ (\phi_u) = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial u \phi}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \phi \cos \phi}{\partial \phi} \right) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \phi$ 为系统局部总能量, ϕ 为位涡度:

$$= \frac{1}{\phi} \left\{ 2 \sin \phi + \frac{1}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial u \cos \phi}{\partial \phi} \right) \right\} \quad (6)$$

是系统的一个守恒量, 关于这一点在后面的讨论中可以得到论证. 定义算子 J :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & & & -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ & & 0 & -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} & -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \cos \phi & & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

并记:

$$F = [u, v, \phi]^T, \quad (8)$$

则原方程可写成:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = JG, \quad (9)$$

其中

$$G = [u\phi, v\phi, \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \phi]^T, \quad (10)$$

引入 H^m 上的函数空间:

$$H^m = \left\{ x(\lambda, \phi) \mid x(\lambda, \phi) = [x_1(\lambda, \phi), x_2(\lambda, \phi), x_3(\lambda, \phi)]^T, x_i(\lambda, \phi) \in H^m(\lambda, \phi), i = 1, 2, 3; \left(\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^k \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^j x_i(\lambda, \phi) \text{ 满足条件 (3)、(4)}, i = 1, 2, 3; k + j = 0, 1, \dots, m - 1 \right\},$$

并定义变分算子 $\frac{\delta}{\delta x}$:

$$\frac{\delta}{\delta x} := \sum_{k=0}^m (-1)^k C_k^j \left(\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^k \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^{j-k} \frac{\partial}{\partial x^{(j,k,\phi)}}, \quad (11)$$

和能量泛函 $H(F)$:

$$H(F) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos \phi d\lambda \int_0^a \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + \phi) \phi a^2 d\phi = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + \phi) \phi ds. \quad (12)$$

$$(ds = a^2 \cos \phi d\lambda d\phi)$$

其中 $C_k^j = \frac{j! (k-j)!}{k!}$,

$$x^{(i,j)} = \left(\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^i \left(\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^j x(\lambda, \phi),$$

则不难验证:

$$\frac{\delta H}{\delta F} = G = \left[u\phi, v\phi, \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \phi \right]^T. \quad (13)$$

于是方程 (5) 便可写成正则形式:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = J \frac{\delta H}{\delta F}. \quad (14)$$

定义 $H^m(\lambda, \phi)$ 上的内积 $(\cdot, \cdot)_1$:

$$(f, g)_1 = \iint_{\Omega} f \cdot g ds, \quad (\forall f, g \in H^m(\lambda, \phi)), \quad (15)$$

和 H^m 上的内积 $(\cdot, \cdot)_3$:

$$(F_1, F_2)_3 = \iint_{\Omega} F_1^T F_2 ds, \quad (\forall F_1, F_2 \in H^m). \quad (16)$$

则在 $(\cdot, \cdot)_1$ 下可以验证 $\frac{\delta}{\delta \lambda}$ 和 $\frac{\delta}{\delta \phi}$ 的伴随算子为 (由齐次边界条件 (3) 和周期边界条件 (4)):

$$\begin{cases} \left(\frac{\delta}{\delta \lambda} \right)^* = -\frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \cos \phi, \\ \left(\frac{\delta}{\delta \phi} \right)^* = -\frac{\partial}{\partial \phi}. \end{cases} \quad (17)$$

因此, 可进而证明, 在 $(\cdot, \cdot)_3$ 下, 由 (7) 式定义的算子 J 是反对称的: $J^* = J^T = -J$. 利用 J 的反对称性即可推出大气体系的重要物理性质——总能量守恒性:

$$\frac{dH(F)}{dt} = \left[\frac{H(F)}{F}, \frac{\partial F}{\partial t} \right]_3 = \left[\frac{H(F)}{F}, J \frac{H(F)}{F} \right]_3 = 0. \quad (18)$$

定义算符{,}:

$$\{T, S\} = \left[\begin{matrix} T \\ F, J \frac{S}{F} \end{matrix} \right]_3, \quad (\forall T, S: H^m \rightarrow R), \quad (19)$$

则它为 H^m 上的一个泊松括弧,而{ T, S}本身仍然是 $H^m \rightarrow R$ 的一个泛函,并且可以证明该泊松括弧具有如下性质:

- 1) 反对称性:任给 T 和 $S: H^m \rightarrow R$, 有: $\{T, S\} = -\{S, T\}$;
- 2) 线性:任给 $a, b \in R$ 和 $H, T, S: H^m \rightarrow R$, 有: $\{H, aT + bS\} = a\{H, T\} + b\{H, S\}$;
- 3) Jacobi 性质:任给 $H, T, S: H^m \rightarrow R$, 有:

$$\{\{T, S\}, H\} + \{\{S, H\}, T\} + \{\{H, T\}, S\} = 0.$$

系统的一个守恒泛函通常还称作为不变量(或第一积分).显然, $H(F)$ 为系统(14) (或(5))的一个最基本的不变量.可以证明,系统(14) (或(5))还具有另外 4 个不变量 $H_0(F)$ 、 $H_1(F)$ 、 $H_2(F)$ 和 $H_3(F)$:

$$H_0(F) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos d \int_0^2 \phi a^2 d, \quad (20)$$

$$H_1(F) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos d \int_0^2 \phi a^2 d, \quad (21)$$

$$H_2(F) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos d \int_0^2 -\phi a^2 d, \quad (22)$$

$$H_3(F) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos d \int_0^2 \frac{1}{2} \phi a^2 d. \quad (23)$$

它们分别代表大气体系的质量守恒性、位涡守恒性、角动量守恒性和拟能守恒性,其中角动量 L 定义为:

$$L = u \cos \theta + a \sin^2 \theta. \quad (24)$$

除了上述不变量以外,大气体系还具有很多其他的不变量.关于这一点,可以从下面的讨论中得到论证.对方程(5)的第 1 式和第 2 式作涡度运算并利用式(5)的第 3 式,就可得到气象上常用的位涡方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left(u \frac{\partial}{\partial \theta} + v^* \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) = 0, \quad (25)$$

其中 $v^* = v \cos \theta$. 对任何一个 $R \rightarrow R$ 连续可微的函数 $g(x)$, 容易推出 $\omega = g(\omega)$ 也满足(25)式:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left(u \frac{\partial}{\partial \theta} + v^* \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) = 0. \quad (26)$$

再利用方程(5)的第 3 式,便可推出下列守恒性:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\omega, \phi)_1 &= \frac{d}{dt} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos d \int_0^2 g(\omega) \phi a^2 d \\ &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

即 $H_g = (\omega, \phi)_1$ 为大气体系的一个不变量.由于 g 的任意性,说明大气体系的不变量有无穷多个.由于满足(21)式,故为系统的一个守恒量.关于大气体系的不变量,我们有下列的定理:

定理 1 对任何一个泛函 $T(F): H^m \rightarrow R$, 它为系统(14)的一个不变量的充分必要条件是: $\{T, H\} = 0$.

上述定理的证明很简单,因为

$$\begin{aligned} \frac{dT(F)}{dt} &= \left[\begin{matrix} T \\ F, \frac{\partial F}{\partial t} \end{matrix} \right]_3 = \\ &= \left[\begin{matrix} T \\ F, J \frac{H}{F} \end{matrix} \right]_3 = \{T, H\}. \end{aligned} \quad (28)$$

所以 $dT/dt = 0$ 等价于 $\{T, H\} = 0$. 有了上述定理,不难证明:

定理 2 若 T 和 S 都为系统(14)的不变量,则 $P = \{T, S\}$ 亦为该系统的不变量.

定理 2 从理论上严格论证了大气体系有无穷多个不变量的结论.根据这一结论和泊松括弧的性质,我们便得到关于大气体系的一个非常重要的定理:

定理 3 系统(14)的所有不变量组成的集合对运算{,} (泊松括弧)组成一个李代数 R_H .

这一定理告诉我们,大气体系(14)具有与有限维 Hamilton 系统相同的性质,因此,可以当作为一个无限维 Hamilton 系统.对于已给出的 Hamilton 泛函 $H(F): H^m \rightarrow R$, 必存在依赖 H 和时间 t 的辛变换族 G_H^t , 称之为相流,而 JH/F 称之为相流的速度向量.对任何不变量 $H_s \in R_H$, 由方程 $\partial F / \partial t = JH_s/F$ 确定的相流 $G_{H_s}^t$ 与 G_H^t 是可变换的,即: $G_H^t G_{H_s}^t = G_{H_s}^t G_H^t$.

那么,如何在数值求解大气体系(14)时保持其 Hamilton 性质呢?这是一个非常重要的问题.根据辛算法^[8]的思想以及一些相关工作^[4-7]的启示,可以先将无限维 Hamilton 系统(14)用一个有限维 Hamilton 系统来逼近,然后再用辛格式求解这个有限维 Hamilton 系统.这是用辛算法求解大气方程的一个重要途径.

2 Hamilton 近似

现在,我们将无限维 Hamilton 系统(14)离散成一个有限维 Hamilton 系统.先将原系统的空间定义域 Ω 进行均匀网格剖分:

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{2n-1} < \theta_{2n} = 2\pi,$$



$-\frac{1}{2} = 0 < 1 < \dots < 2m < 2m+1 = \frac{1}{2}$,
其中

$$i = i, \quad = \overline{n};$$

$$j = -\frac{1}{2} + j, \quad = \overline{2m+1},$$

($i = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1, 2n; j = 0, 1, \dots, 2m, 2m + 1$).
函数 $u(, , t), v(, , t), \phi(, , t)$ 在格点
(i, j) 上的值记为 $u_{i,j}(t), v_{i,j}(t), \phi_{i,j}(t)$. 令:

$$F^d = \begin{bmatrix} u^d \\ v^d \\ \phi^d \end{bmatrix}, \quad (29)$$

其中

$$\begin{cases} u^d = [u_{1,0}, u_{1,1}, \dots, u_{1,2m+1}, u_{2,0}, u_{2,1}, \dots, \\ u_{2,2m+1}, \dots, u_{2n,0}, u_{2n,1}, \dots, u_{2n,2m+1}]^T, \\ v^d = [v_{1,0}, v_{1,1}, \dots, v_{1,2m+1}, v_{2,0}, v_{2,1}, \dots, \\ v_{2,2m+1}, \dots, v_{2n,0}, v_{2n,1}, \dots, v_{2n,2m+1}]^T, \\ \phi^d = [\phi_{1,0}, \phi_{1,1}, \dots, \phi_{1,2m+1}, \phi_{2,0}, \phi_{2,1}, \dots, \\ \phi_{2,2m+1}, \dots, \phi_{2n,0}, \phi_{2n,1}, \dots, \phi_{2n,2m+1}]^T. \end{cases} \quad (30)$$

则其 Hamilton 泛函可离散为:

$$H^d(F^d) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=0}^{2m+1} \frac{1}{2} (u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2 + \phi_{i,j}) \cdot \phi_{i,j} a^2_j, \quad (31)$$

其中, 权重参数 a_j 定义为:

$$a_j = \begin{cases} \frac{1}{4} \cos^{-1/2}, & j = 0, \\ \cos^{-1/2}, & j = 1, 2, \dots, 2m, \\ \frac{1}{4} \cos^{-1/2}, & j = 2m + 1. \end{cases} \quad (32)$$

对于任何一个离散泛函 $T^d(F^d)$:

$$T^d(F^d) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=0}^{2m+1} T_{i,j}(F^d) a^2_j, \quad (33)$$

定义变分导数 $\frac{\delta}{\delta F^d}$:

$$\frac{\delta}{\delta F^d} = \begin{bmatrix} \frac{\delta T^d}{\delta u^d} \\ \frac{\delta T^d}{\delta v^d} \\ \frac{\delta T^d}{\delta \phi^d} \end{bmatrix}, \quad (34)$$

其中

$$\begin{cases} \left(\frac{\delta T^d}{\delta u^d} \right)_{i,j} = \frac{\delta T_{i,j}}{\delta u^d}, & (i = 1, 2, \dots, 2n), \\ \left(\frac{\delta T^d}{\delta v^d} \right)_{i,j} = \frac{\delta T_{i,j}}{\delta v^d}, & (j = 0, 1, \dots, 2m + 1), \\ \left(\frac{\delta T^d}{\delta \phi^d} \right)_{i,j} = \frac{\delta T_{i,j}}{\delta \phi^d}. \end{cases} \quad (35)$$

这样

$$\frac{\delta H^d}{\delta F^d} = \begin{bmatrix} h_u^d \\ h_v^d \\ h_\phi^d \end{bmatrix}, \quad (36)$$

其中

$$\begin{cases} h_u^d = [h_{1,0}^{(u)}, h_{1,1}^{(u)}, \dots, h_{1,2m+1}^{(u)}, h_{2,0}^{(u)}, h_{2,1}^{(u)}, \dots, h_{2,2m+1}^{(u)}, \\ \dots, h_{2n,0}^{(u)}, h_{2n,1}^{(u)}, \dots, h_{2n,2m+1}^{(u)}]^T, \\ h_v^d = [h_{1,0}^{(v)}, h_{1,1}^{(v)}, \dots, h_{1,2m+1}^{(v)}, h_{2,0}^{(v)}, h_{2,1}^{(v)}, \dots, h_{2,2m+1}^{(v)}, \\ \dots, h_{2n,0}^{(v)}, h_{2n,1}^{(v)}, \dots, h_{2n,2m+1}^{(v)}]^T, \\ h_\phi^d = [h_{1,0}^{(\phi)}, h_{1,1}^{(\phi)}, \dots, h_{1,2m+1}^{(\phi)}, h_{2,0}^{(\phi)}, h_{2,1}^{(\phi)}, \dots, h_{2,2m+1}^{(\phi)}, \\ \dots, h_{2n,0}^{(\phi)}, h_{2n,1}^{(\phi)}, \dots, h_{2n,2m+1}^{(\phi)}]^T. \end{cases} \quad (37)$$

而

$$\begin{cases} h_{i,j}^{(u)} = u_{i,j} \phi_{i,j}, \\ h_{i,j}^{(v)} = v_{i,j} \phi_{i,j}, \\ h_{i,j}^{(\phi)} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2) + \phi_{i,j}^2. \end{cases} \quad (38)$$

$(i = 1, 2, \dots, 2n),$
 $(j = 0, 1, \dots, 2m + 1).$

采用待定系数法^[8,9], 可求得与算子 J 相容的离散反对称算子 J_d :

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & d & - \\ - & d & 0 & - \\ & T & T & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

其中 d 、 T 和 $-$ 均为 $k_0 \times k_0$ 矩阵 ($k_0 = 2n \times (2m + 2)$, d 为对角阵), 且任给 $g \in R^{k_0}$:

$$g = [g_{1,0}, g_{1,1}, \dots, g_{1,2m+1}, g_{2,0}, g_{2,1}, \dots, g_{2,2m+1}, \dots, g_{2n,0}, g_{2n,1}, \dots, g_{2n,2m+1}]^T,$$

它们分别满足:

$$\begin{cases} d g_{i,j} = (d g)_{i,j} = -_{i,j} g_{i,j}, \\ T g_{i,j} = (T g)_{i,j} = -_{i,j} g_{i,j}, \\ -_{i,j} = \frac{1}{\phi_{i,j}} [2 \sin^{-1/2} - T v_{i,j} + T u_{i,j}]. \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} g_{i,0} = (g)_{i,0} = 0, \\ g_{i,2m+1} = (g)_{i,2m+1} = 0, \end{cases} \quad (1 \leq i \leq 2n). \quad (41)$$

$$g_{i,j} = (g)_{i,j} = \begin{cases} \frac{g_{2,j} - g_{2n,j}}{2a \cos j}, & (i = 1, 1 \leq j \leq 2m), \\ \frac{g_{i+1,j} - g_{i-1,j}}{2a \cos j}, & (2 \leq i \leq 2n-1, 1 \leq j \leq 2m), \\ \frac{g_{1,j} - g_{2n-1,j}}{2a \cos j}, & (i = 2n, 1 \leq j \leq 2m). \end{cases} \quad (42)$$

$$g_{i,j} = (g)_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{4na} \sum_{i=1}^{2n} g_{i,1}, & (1 \leq i \leq 2n, j = 0), \\ \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j-1}}{2a}, & (1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 2m), \\ -\frac{1}{4na} \sum_{i=1}^{2n} g_{i,2m}, & (1 \leq i \leq 2n, j = 2m + 1), \end{cases} \quad (43)$$

对于定义在 R^{k_0} 上的内积 $(\cdot, \cdot)_1^d$:

$$(g_1, g_2)_1^d = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=0}^{2m+1} g_{i,j}^1 g_{i,j}^2 a^2_j, \quad (\forall g_1, g_2 \in R^{k_0}), \quad (44)$$

容易验证:

$$\begin{cases} \tau = - \\ -\tau g_{i,j} = -(\tau g)_{i,j} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{2na} \sum_{i=1}^{2n} g_{i,2}, & (1 \leq i \leq 2n, j = 0), \\ \frac{g_{i,j+1} - g_{i,j-1}}{2a}, & (1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 2m), \\ -\frac{2m-1}{2na} \sum_{i=1}^{2n} g_{i,2m-1}, & (1 \leq i \leq 2n, j = 2m + 1), \end{cases} \quad (\forall g \in R^{k_0}). \quad (45)$$

最后,我们得到离散后的惯性体系:

$$\frac{dF^d}{dt} = J_d \frac{hH^d}{hF^d}. \quad (46)$$

$$\{T^d, S^d\}_d = \left(\frac{hT^d}{hF^d}, J_d \frac{hS^d}{hF^d} \right)_3^d, \quad (\forall T^d, S^d \in R^{3k_0} \rightarrow R), \quad (49)$$

定义 R^{3k_0} 上的内积 $(\cdot, \cdot)_3^d$ 为:

$$(F_1, F_2)_3^d = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=0}^{2m+1} (u_{i,j}^T v_{i,j}^T + \phi_1^T \phi_2) a^2_j, \quad (47)$$

其中 $F_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix}$ 和 $F_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$ R^{3k_0} 为任给, 而 $u_1, v_1, \phi_1, u_2, v_2, \phi_2 \in R^{k_0}$. 由(31)式可得:

$$\begin{aligned} \frac{dH^d}{dt} &= \left(\frac{hH^d}{hF^d}, \frac{dF^d}{dt} \right)_3^d \\ &= \left(\frac{hH^d}{hF^d}, J_d \frac{hH^d}{hF^d} \right)_3^d = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

定义离散空间的泊松括弧:

则同样可以验证运算 $\{, \}_d$ 的反对称性、线性和 Jacobi 性质. 另外, 关于离散系统 (46) 的不变量, 除 $H^d(F^d)$ 外, 还可以验证以下的两个不变量:

$$H_0^d(F^d) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=0}^{2m+1} \phi_{i,j} a^2_j, \quad (50)$$

$$H_1^d(F^d) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=0}^{2m+1} \phi_{i,j} u_{i,j} a^2_j. \quad (51)$$

不变量 $H_0^d(F^d)$ 可直接从系统(46)的第三个方程推出, 而不变量 $H_1^d(F^d)$ 则可从下列离散方程得到:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau(u) \\ \tau(v) \end{pmatrix}, \quad (52)$$

其中 $\tau(u), \tau(v) \in R^{k_0}$, 其结构与 u^d, v^d, ϕ^d 相似, 它们的分量定义如下:

$$\begin{aligned} (\tau(u))_{i,j} &= \phi_{i,j} u_{i,j}, \\ (\tau(v))_{i,j} &= v_{i,j} \phi_{i,j}. \end{aligned} \quad (53)$$

该离散方程可通过对系统(46)的前两个分量方程分别作用算子 T^T , T 然后相减推导而来. 类似上一节的讨论,对系统(46)的不变量,有如下定理:

定理 4 对任何一个离散泛函 $T^d(F^d): R^{3k_0}$ R , 它为系统(46)的一个不变量的充分必要条件是: $\{T^d, H^d\}_d = 0$.

定理 5 若 T^d 和 S^d 都为系统(46)的不变量, 则 $P^d = \{T^d, S^d\}_d$ 亦为该系统的不变量.

根据已有的 3 个不变量,利用定理 5 便可从理论上严格论证离散体系(46)也具有无穷多个不变量. 由此,得到了关于离散体系的一个非常重要的定理:

定理 6 系统(46)的所有不变量组成的集合对运算 $\{, \}_d$ (泊松括号)组成一个李代数 R_H^d .

上述定理表明,离散体系(46)为一个有限维 Hamilton 系统.

3 全离散辛格式及其整体性质

根据冯康先生的思想^[1-3],采用辛格式求解有限维 Hamilton 系统(46)可保持其重要的几何性质. 而隐式 Euler 中点格式就是一种典型的辛格式^[1]. 求解系统(46)的隐式 Euler 中点格式可写成如下形式:

$$\frac{F_s^{k+1} - F_s^k}{t} = J_s^{k+\frac{1}{2}} \frac{h H_s^{k+\frac{1}{2}}}{h F_s^{k+\frac{1}{2}}}, \quad (54)$$

其中

$$J_s^{k+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & s^{k+\frac{1}{2}} & - \\ - \left(s^{k+\frac{1}{2}} \right)^T & 0 & - \\ T & T & 0 \end{bmatrix}, \quad (55)$$

$$\begin{cases} s^{k+\frac{1}{2}} g_{i,j} = \left(s^{k+\frac{1}{2}} \right)^T g_{i,j} = \frac{1}{i,j} g_{i,j}, \\ s^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}} \left[2 \sin_j - T V_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + T u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right], \end{cases} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} H_s^{k+\frac{1}{2}} &= H_s(F_s^{k+\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=0}^{2m+1} \left(\left(u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right)^2 + \left(v_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} a^2_j, \end{aligned} \quad (57)$$

$$F_s^k = \begin{bmatrix} u_s^k \\ v_s^k \\ \phi_s^k \end{bmatrix}, \quad (58)$$

$$\begin{cases} u_s^k = [u_{1,0}^k, u_{1,1}^k, \dots, u_{1,2m+1}^k, u_{2,0}^k, u_{2,1}^k, \dots, u_{2,2m+1}^k, \\ \dots, u_{2n,0}^k, u_{2n,1}^k, \dots, u_{2n,2m+1}^k]^T, \\ v_s^k = [v_{1,0}^k, v_{1,1}^k, \dots, v_{1,2m+1}^k, v_{2,0}^k, v_{2,1}^k, \dots, v_{2,2m+1}^k, \\ \dots, v_{2n,0}^k, v_{2n,1}^k, \dots, v_{2n,2m+1}^k]^T, \\ \phi_s^k = [\phi_{1,0}^k, \phi_{1,1}^k, \dots, \phi_{1,2m+1}^k, \phi_{2,0}^k, \phi_{2,1}^k, \dots, \phi_{2,2m+1}^k, \\ \dots, \phi_{2n,0}^k, \phi_{2n,1}^k, \dots, \phi_{2n,2m+1}^k]^T. \end{cases} \quad (59)$$

而

$$F_s^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (F_s^k + F_s^{k+1}), \quad (60)$$

即

$$\begin{cases} u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k+1}), \\ v_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (v_{i,j}^k + v_{i,j}^{k+1}), \\ \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\phi_{i,j}^k + \phi_{i,j}^{k+1}). \end{cases} \quad (61)$$

容易验证算子 $J_s^{k+\frac{1}{2}}$ 具有反对称性. 为了便于应用,我们把格式(54)具体写出来:

$$\begin{cases} \frac{u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^k}{t} + \frac{1}{i,j} - \frac{1}{i,j} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} v_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = 0, \\ \frac{v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j}^k}{t} + \frac{1}{i,j} + \frac{1}{i,j} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = 0, \\ \frac{\phi_{i,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^k}{t} - T \left(u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) - T \left(v_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) = 0, \end{cases} \quad (62)$$

其中

$$\frac{1}{i,j} = \frac{1}{2} \left(\left(u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right)^2 + \left(v_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right)^2 \right) + \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}. \quad (63)$$

下面,我们研究格式(62)的整体性质. 从(62)的第 3 式,根据 T 和 T^T 的定义,容易验证该格式仍然保持不变量 H_0 :

$$\frac{H_0(F_s^{k+1}) - H_0(F_s^k)}{t} = 0, \quad (64)$$

其中

$$H_0(F_s^k) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=0}^{2m+1} \phi_{i,j}^k a^2_j. \quad (65)$$

从物理上讲,(64)式表示着全离散系统的质量守恒性. 再用算子 T 和 T^T 分别作用于式(62)的第 1 式和第 2 式,然后相减,即可得到涡度差分方程:

$$\frac{1}{i,j} - \frac{1}{i,j} - T \left(u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) - T \left(v_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) = 0, \quad (66)$$

其中

$${}_{i,j}^k = {}_{i,j}^k \phi_{i,j}^k = 2 \sin j - {}^T v_{i,j}^k + {}^T u_{i,j}^k. \quad (67)$$

从(66)式便可直接推出全离散系统(62)的另一个不变量 H_1 :

$$\frac{H_1(F_s^{k+1}) - H_1(F_s^k)}{t} = 0, \quad (68)$$

其中

$$\begin{aligned} H_1(F_s^k) &= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=0}^{2m+1} {}_{i,j}^k a^2 \\ &= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=0}^{2m+1} \phi_{i,j}^k {}_{i,j}^k a^2. \end{aligned} \quad (69)$$

这表明全离散系统(62)具有位涡守恒性. 下面, 检验一下全离散体系是否保持哈密顿势 $H_s(F_s^k)$ 不变, 即它是否具有能量守恒性. 由(54)式及算子 $J_s^{k+\frac{1}{2}}$ 的反对称性可得:

$$\left[\frac{F_s^{k+1} - F_s^k}{t}, \frac{h H_s^{k+\frac{1}{2}}}{h F_s^{k+\frac{1}{2}}} \right]_3^d = 0. \quad (70)$$

展开并利用(62)式整理得:

$$\begin{aligned} \frac{H_s(F_s^{k+1}) - H_s(F_s^k)}{t} &= \\ &= \frac{t^2}{4} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=0}^{2m+1} \left[\left(\frac{{}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{i,j^2} - \frac{{}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} v_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{i,j^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{{}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{i,j^2} + \frac{{}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{i,j^2} \right)^2 \right] \times \\ &\quad \left[{}^T \left(u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) + {}^T \left(v_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) \right] a^2. \end{aligned} \quad (71)$$

由此可知, 辛格式(62) (或(54)) 不能严格保持能量守恒性. 只有当 t 充分小时, 式(62)才近似具备能量守恒性. 然而, 在实际计算中, (71)式右端的

$\frac{{}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{i,j^2} - \frac{{}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} v_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{i,j^2}$, $\frac{{}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{i,j^2} + \frac{{}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{i,j^2}$ 和 ${}^T \left(u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right) + {}^T \left(v_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \right)$ 的量级均很小, 大约为 10^{-3} ; 而离散泛函 $H(F_s^k)$ 中的 $\frac{1}{2} ((u_{i,j}^k)^2 + (v_{i,j}^k)^2 + \phi_{i,j}^k)$ 的量级却大得多, 大约为 $10^9 \sim 10^{10}$. 这样, (71)式右端相对于 $H(F_s^k)$ 来说量级非常小, 接近甚至等于机器零. 所以, 格式(62)几乎严格保持能量守恒性:

$$\frac{H_s(F_s^{k+1}) - H_s(F_s^k)}{t} = 0. \quad (72)$$

关于这一点, 可以从后面的数值试验中得到验证. 若采用下列格式求解系统(46):

$$\begin{cases} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{t} + \frac{1}{2} \left(\frac{{}_{i,j}^{k+1}}{i,j} + \frac{{}_{i,j}^k}{i,j} \right) - \frac{{}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} v_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{i,j^2} = 0, \\ \frac{v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j}^k}{t} + \frac{1}{2} \left(\frac{{}_{i,j}^{k+1}}{i,j} + \frac{{}_{i,j}^k}{i,j} \right) + \frac{{}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{i,j^2} = 0, \\ \frac{\phi_{i,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^k}{t} - \left[\frac{{}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}} \right] - \left[\frac{{}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{v_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}} \right] = 0, \end{cases} \quad (73)$$

类似上面的推导可以证明, 格式(73)不仅能保持质量和位涡守恒, 而且能严格保持能量守恒性. 但该格式却不是辛格式. 不过, 由于它良好的整体性质, 它在实际数值模拟中可获得与辛格式同等的效果.

4 数值试验

为了检验辛格式的计算效果, 今用理想的 4 波 Rossby-Haurwitz 波^[10] (简称 R-H 波) 来对它进行试验. 这是一种常用的检验数值格式的方法. 由于 R-H 波的解具有优良的性质, 即波形和振幅不随时间的发展而改变, 只是相位会有规则地移动. 显然, 一个数值格式能否保持真解的这些重要特征是可以作为衡量该格式计算能力的一个重要准则. 那么, 辛算法能否通过这一检验呢? 且看下面的数值试验. 4 波 Rossby-Haurwitz 波的初始场为如下形式:

$$\begin{aligned} \phi(\cdot, \cdot) &= \phi_0 + a^2 \left\{ \frac{1}{4} [(r+1) \cos^{2r+2} + (2r^2 - r - 2) \cos^{2r} - 2r^2 \cos^{2r-2}] + \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{(r+1)(r+2)} [(r^2 + 2r + 2) - (r+1)^2 \cos^2] \cos^r \cos(r) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{4} [(r+1) \cos^2 - r - 2] \cos^{2r} \cos(2r) \right\}, \\ u(\cdot, \cdot) &= a [\cos + \cos^{r-1} \cos(r) (r \sin^2 - \cos^2)], \\ v(\cdot, \cdot) &= -a r \cos^{r-1} \sin \sin(r). \end{aligned}$$

其中 r 、 a 和 ϕ_0 分别表示纬向波数、超级旋转角速度、地球旋转角速度和大气平均重力位势. 这里我们分别取 $r = 4$, $a = 3.924 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $\phi_0 = 7.292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $\phi_0 = 78\,400 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$. 采用上述公式, 即可求出初始时刻 ϕ, u, v 的值. 以北半球重力位势场为例, 可以画出其波形(如图 1 所示). 可以看到, 由于 $r = 4$, 北半球初始重力位势场沿纬向出现 4 个均匀的槽脊变化, 故称之为 4 波(南半球情况相同). 图 2 给出了用辛算法积分 120 天的结果, 不难发现, 重力位势场的波形和振幅确实没有发生改变, 只是相位有所移动. 这表明辛格式确能保持真解的重要特征, 从而

显示出它很强的模拟性能.

数值试验还显示,辛格式具有良好的物理性质.从表 1 可以看出,该方法能够严格地保持三个总体守恒性:总能量守恒、总质量守恒和总位涡守恒.值得一提的是,极地是大气系统的可去奇点,用差分方法离散模拟时,往往会出现很强的高频效应,从而导致极区的紊乱现象.通常采用滤波或平滑的方法来克服这一困难,但那样又会破坏总能量的守恒

性.然而,采用辛算子法来求解,可以完美地解决这些问题.在上面的数值试验中,经 120 天(43 200 步,时间步长 240 s)长时间数值积分后,未作任何滤波和平滑,在极区也没有出现任何高频波或计算紊乱,这一点从图 2 中可以直接看到.由此可见,辛算子法确实是性能优秀的数值方法,它的实用性将在另文中进一步显现出来.

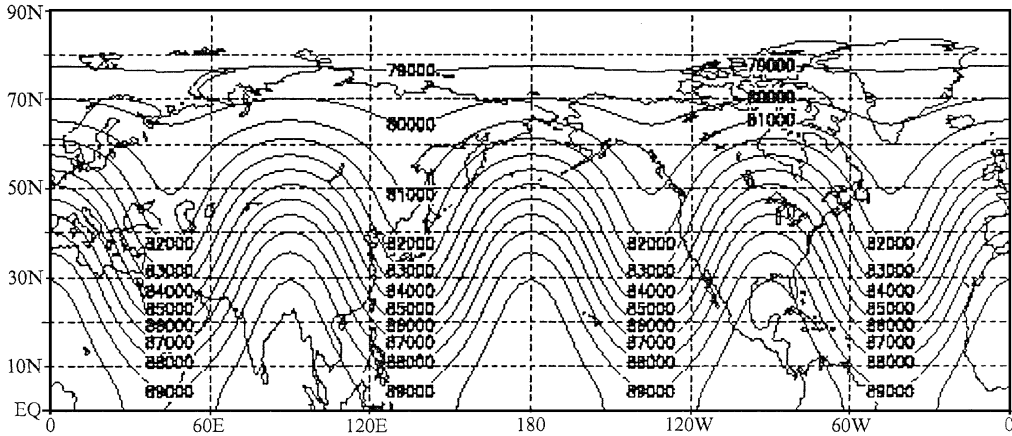


图 1 初始时刻的 Rossby-Haurwitz 波

Fig. 1 The initial Rossby-Haurwitz waves

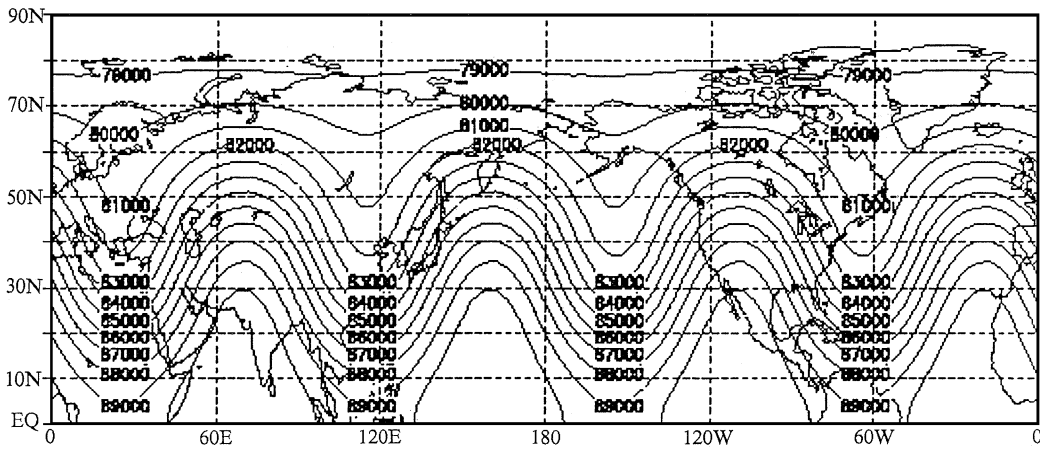


图 2 积分 120 天后的 Rossby-Haurwitz 波

Fig. 2 The Rossby-Haurwitz waves after 120-day integration

表 1 辛格式模拟的全球总能量、总质量和总位涡随时间的演变

Table 1 Evolutions of the global energy, global mass and global potential vorticity simulated by symplectic scheme

积分天数 Integration Day	全球总能量/ $m^4 \cdot s^{-4}$ Global Energy/ $m^4 \cdot s^{-4}$	全球总质量/ $m^2 \cdot s^{-2}$ Global Mass/ $m^2 \cdot s^{-2}$	全球总位涡/ s^{-1} Global Potential Vorticity/ s^{-1}
1	7618457306235.04	175248643.1728687	-0.0000000000000001
20	7618457306244.33	175248643.1728679	0.0000000000000009
40	7618457306240.22	175248643.1728706	-0.0000000000000008
60	7618457306237.16	175248643.1728692	0.0000000000000008
80	7618457306244.37	175248643.1728689	-0.0000000000000009
100	7618457306230.20	175248643.1728696	-0.0000000000000003
120	7618457306238.05	175248643.1728700	0.0000000000000021

[参 考 文 献]

- [1] Feng Keng. On Difference scheme and symplectic geometry [A]. In: Feng Kang ed. Proceedings of the 1984 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations-COMPUTATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS [C]. Beijing. 1984. Beijing: Science Press, 1985. 42 - 58.
- [2] Feng Keng. Difference schemes for Hamiltonian formalism and symplectic geometry [J]. Journal of Computational Mathematics, 1986, 4(3) :279 - 289.
- [3] 冯康, 秦孟兆. Hamilton 动力体系的 Hamilton 算法 [J]. 自然科学进展, 1991, 1(2) :102 - 112.
- [4] Huang Ming You. A Hamiltonian Approximation to simulate solitary waves of the Korteweg-DeVries Equation [J]. Mathematics of Computation, 1991, 56(194) :607 - 620.
- [5] Simo Jc, Tarnow N, Wong K K. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics [J]. Comp Meth Appl Mech Eng, 1992, 1:63 - 116.
- [6] McLachlan. Symplectic integration of Hamiltonian wave equations [J]. Numerische Mathematik, 1994, 66:465 - 492.
- [7] Oscar Gonzalez. Time integration and discrete Hamiltonian system [J]. J Nonlinear Sci, 1996, 6(5) :449 - 467.
- [8] 王斌, 季仲贞, 曾庆存. 辛算子法及其检验 [J]. 自然科学进展, 1997, 7(6) :668 - 675.
- [9] 王斌. 用待定系数法构造平方守恒型差分格式 [J]. 中国科学院研究生院学报, 1988, 5(2) :84 - 91.
- [10] Zhang Xuehong, Zeng Qingcun. Some Theoretical and Experimental Studies on Rossby-Haurwitz Waves [A]. In: Zeng Qingcun Ed. Proceedings of International Summer Colloquium on Nonlinear Dynamics of the Atmosphere [C]. Beijing. 1986. Beijing: Science Press, 1986. 190 - 197.

HAMILTONIAN ALGORITHM FOR SOLVING THE DYNAMIC EQUATIONS OF ATMOSPHERE

WANG Bin¹, JI Zhong-zhen¹, XIAO Qing-nong²

(1. LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, P R China;

2. Department of Meteorology, Florida State University, U S A)

[Abstract] The Hamiltonian nature of the dynamic equations of atmosphere is studied further, based on its regular form and its infinitely many first integrals equipped with a given Poisson bracket. Without the friction and forcing processes, the dynamic equation system of atmosphere is proved to be a Hamiltonian system. A symplectic scheme to solve the system is proposed, whose good performance is shown in a numerical experiment.

[Key words] dynamic equations of atmosphere; Hamiltonian system; symplectic scheme