

半拉格朗日平方守恒计算格式的研究*

陈嘉滨

(中国科学院大气物理研究所, 北京 100029)

季仲贞

(中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟实验室, 北京 100029)

摘要 作者研究了一种新的显式平方守恒的半拉格朗日计算格式。该格式是欧拉空间平方守恒格式在半拉格朗日空间的推广和发展, 并采用了守恒插值方法。此外, 还给出这种格式在一维原始方程上的应用。

关键词: 半拉格朗日计算格式; 完全能量守恒; 守恒插值

1 前言

目前半拉格朗日计算格式广泛应用于数值天气预报业务, 不仅提高了计算时效而且改进了计算精度。但存在的问题是原来偏微分方程的整体守恒性得不到保证, 长时间数值积分会带来计算误差。世界上使用的守恒格式, 是指在时间保持连续情况下的守恒, 典型格式是 Arakawa 的格式^[1]。在时间离散情况下, 这样的守恒格式却不能保证物理量的守恒, 并且其守恒性问题仅局限在欧拉空间讨论。目前, 国外研究半拉格朗日空间的守恒格式尚不多见。本研究是应用欧拉空间显式完全平方守恒格式^[2,3]和守恒插值方法^[4], 构造一种新的平方守恒半拉格朗日计算格式。本文将这种新格式应用到一维原始方程上, 并得到初步的计算结果。

2 一维浅水波方程的分析

欧拉空间完全平方守恒格式的关键, 是偏微分方程右端项的微分算子的离散空间算子具有反对称性质, 它们的平方变量(如能量)可写为辐散形式。在拉格朗日空间, 偏微分方程也应具有此性质, 该格式才能推广。对一维重力波方程

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2)$$

其能量方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u^2 \varphi + \varphi^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u \varphi^2}{2} \right) - \frac{\varphi u^2 + \varphi^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3)$$

2000-07-27 收到, 2000-09-28 收到修改稿

* 国家重点基础研究发展规划项目 G1998040900 和国家自然科学基金资助项目 49975020 共同资助

其中 u 是速度, φ 是位势。显然, (3) 式右端项不具有辐散形式。因此, 方程 (1) 和 (2) 的右端项很难构造出具有反对称性质的离散空间算子。

引入辐散的拉格朗日表示^[4]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\delta x} \frac{d}{dt} (\delta x), \quad (4)$$

其中 δx 表示随流体运动的无限小的长度间距。于是, 在拉格朗日空间一维重力波方程 (1)、(2) 可改写为

$$\frac{d}{dt} (U \sqrt{\delta x}) = -\sqrt{\delta x} \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varphi^2}{2} \right), \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} (\varphi \sqrt{\delta x}) = -\sqrt{\delta x} \frac{\varphi}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u), \quad (6)$$

其中

$$\psi = \sqrt{\varphi}, \quad U = \psi u.$$

方程 (5) 和 (6) 的总能量方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{U^2 + \varphi^2}{2} \right) \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{u^2 \varphi + \varphi^2}{2} \delta x \right) = -\delta x \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\varphi^2}{2} \right) = -\delta \left(u \frac{\varphi^2}{2} \right). \quad (7)$$

方程 (7) 的左端项表示在无限小的空间格距 δx 内的能量。重力波方程经过引入散度的拉格朗日表示式, 其形状改变为方程 (5) 和 (6), 它们的总能量方程 (7) 的右端项已具有辐散形式。这表明方程组 (5)、(6) 右端的微分算子可构成具有反对称性质的离散空间算子。因此, 可以在拉格朗日空间中应用类似于欧拉空间构造完全平方守恒格式的方法来构造格式。

3 拉格朗日空间完全平方守恒格式的构造

拉格朗日平方守恒格式的构造分为两部分。第一部分是针对出发点与到达点之间的守恒格式构造, 称为守恒格式构造; 第二部分是标准等距网格上的平方守恒量到由出发点组成的非等距网格上平方守恒插值的构造, 称为守恒插值构造。

类似于欧拉空间显式完全平方守恒格式^[2], 在拉格朗日空间中, 发展方程数值求解问题也可归结为如下形式:

$$\frac{dF}{dt} + HF = G, \quad \lim_{t \rightarrow 0} F = F^{(0)}(x), \quad (8)$$

其中 dF/dt 是随体微商; $H \equiv H(F, x, t)$ 是一个线性或非线性算子; G 是源汇项。为方便起见, 我们取 $G=0$ 。在 (x, t) 空间, 离散化并布网 $(mh, n\tau)$, 其中 h 是空间步长, τ 为时间步长。

为了便于计算, 使用如下的符号定义

$$(G, F) = \sum_m F_m G_m h_m \quad (9)$$

为两个网格函数的内积, 而

$$\|F\| = (F, F)^{1/2} \quad (10)$$

为函数 F 的范数.

对 (8) 两端作 t 微分, 并在半拉格朗日空间对网格函数 F_j^{n+1} 作 Taylor 展开取二阶近似, 则有

$$F_j^{n+1} = F_n^* - \tau A_n F_n^* - \varepsilon_n \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{\delta A_n F_n^*}{\delta t} \right), \quad (11)$$

其中角码 n 和 $n+1$ 分别表示现在和未来时间层; 下角码 j 表示标准网格点坐标, 而 $*$ 则表示流体质点经过 τ 时间到达标准网格点 j 的出发点坐标. 这个出发点坐标 $*$ 一般不与标准网格 j 重合. 流体质点在出发点 $*$ 的变量, 是由标准网格 j 的变量值由守恒内插求得 (见下面第 4 节). 这是十分重要的一步. 这里, 如第一节所述, 算子 A_n 应具有反对称性质. $(\delta A_n F_n^* / \delta t)$ 是 dHF / dt 的差分算子; ε_n 是待定耗散系数. 可适当选取系数 ε_n , 使 (11) 式保持完全能量守恒的目的.

将 (11) 式中第三项写为算子形式 $\varepsilon_n \tau^2 B$, 其中 B 为耗散算子. 这样它就可改写为

$$F_j^{n+1} = F_n^* - \tau L F_n^*, \quad (12)$$

其中

$$L F_n^* = A_n F_n^* + \varepsilon_n \tau B_n F_n^*. \quad (13)$$

在平方守恒条件下计算耗散系数 ε_n . 对 (12) 式两边平方, 在网格上求和, 并利用 (9) 和 (10) 式定义的符号, 则有

$$\|F_j^{n+1}\|^2 = \|F_n^*\|^2 + \tau^2 \|L F_n^*\|^2 - 2\tau(L F_n^*, F_n^*), \quad (14)$$

假如以下条件

$$\tau^2 \|L F_n^*\|^2 - 2\tau(L F_n^*, F_n^*) = 0 \quad (15)$$

成立, 则 (12) 式为半拉格朗日平方守恒的差分格式.

将 (13) 式代入上式, 并注意到算子 A_n 是反对称的, 即 $(A_n F_n^*, F_n^*) = 0$, 则有

$$\tau^2 \|A_n F_n^* + \varepsilon_n \tau B_n F_n^*\|^2 - 2\tau(F_n^*, \varepsilon_n \tau B_n F_n^*) = 0, \quad (16)$$

上式可进一步化为以耗散系数 ε_n 为变量的一元二次方程

$$\tau^2 \|B_n F_n^*\|^2 \varepsilon_n^2 - 2[(B_n F_n^*, F_n^*) - \tau(B_n F_n^*, A_n F_n^*)] \varepsilon_n + \|A_n F_n^*\|^2 = 0, \quad (17)$$

其解为

$$\varepsilon_n = \frac{K_1}{\left(1 - \frac{\tau}{h} K_2\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{\tau}{h} K_2\right)^2 - \left(\frac{\tau}{h} K_3\right)^2}}, \quad (18)$$

其中

$$K_1 = \frac{\|A_n F_n^*\|^2}{(B_n F_n^*, F_n^*)}, K_2 = \frac{(B_n F_n^*, A_n F_n^*) \cdot h}{(B_n F_n^*, F_n^*)}, K_3 = \frac{\|B_n F_n^*\| \cdot \|A_n F_n^*\| \cdot h}{(B_n F_n^*, F_n^*)}. \quad (19)$$

当 $\tau \rightarrow 0, \varepsilon_n \rightarrow$ 常数, 格式 (12) 与原微分方程是相容的。

下面讨论稳定性问题, 由于 $|K_3| \geq |K_2|$, 且 (18) 式分母中根号内的值应大于零, 则有

$$J = \left(1 - \frac{\tau}{h} K_2\right)^2 - \left(\frac{\tau}{h} K_3\right)^2 = \left(1 - \frac{\tau}{h} K_2 - \frac{\tau}{h} K_3\right) \left(1 - \frac{\tau}{h} K_2 + \frac{\tau}{h} K_3\right).$$

若 $K_3 \geq 0$, 则上式右端第 2 括号内的值必大于 1. 有 $\tau \leq h/2K_3$; 若 $K_3 < 0$, 则式右端第 1 括号内大于 1. 有 $\tau \leq h/2(-K_3)$. 因此, 有

$$\tau \leq \frac{h}{2\sqrt{K_3}}, \quad (20)$$

只要时间步长 τ 满足上式, 格式 (12) 就是稳定的。

由上面稳定性分析我们发现, 不要求 K_3 一定是正的, 也不要要求 B 算子为正. 因此, B 算子的构造就比较自由了, 可取

$$B_n F_n^* = \frac{A_{n+1} \bar{F}^{n+1} - A_n F_n^*}{\tau}.$$

其中

$$\bar{F}^{n+1} = F_n^* - \tau A_n F_n^*.$$

守恒插值构造见 4.3 小节。

4 半拉格朗日完全平方守恒格式在一维正压原始方程中的应用

4.1 基本方程

对于一维正压原始方程

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + f_1, \quad (21)$$

$$\frac{dv}{dt} = -fv, \quad (22)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (23)$$

引入如第 2 节提到的散度拉格朗日表示式 (4), 并引入符号 $\psi = \sqrt{\varphi}, (U, V) = \psi(u, v)$, 则方程 (21) ~ (23) 就可改写为

$$\frac{d}{dt}(U\sqrt{\delta x}) = -\sqrt{\delta x} \left[\frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varphi^2}{2} \right) - fV \right], \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt}(V\sqrt{\delta x}) = -\sqrt{\delta x}(fU), \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi\sqrt{\delta x}) = -\sqrt{\delta x}\left(\frac{\varphi}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u)\right). \quad (26)$$

其总能量方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2 + v^2 + \varphi}{2}\varphi\delta x\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u\varphi^2}{2}\right)\delta x. \quad (27)$$

4.2 离散化

假定空间格距 Δx 是固定长度, 到达点是在标准网格上, 出发点一般不在标准网格上, 其空间格距 δx_j 是格点位置的函数, 为了确定出发点的网格, 我们不采用到达标准网格点的流体质点的出发点, 而使用到达标准网格的半点(如 $j+1/2$, $j-1/2$)的流体质点的出发点如图1所示。显然, 这种网格的格距 δx_j 是非等距的。

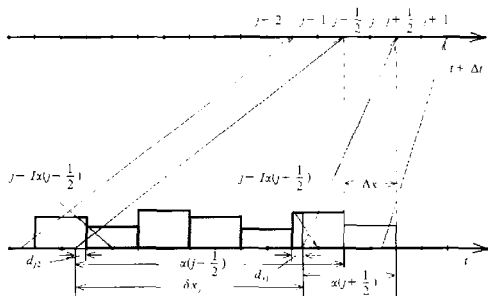


图1 一维半拉格朗日格网和质点位移示意图

流体质点的出发点的确定, 是用 t 时刻的速度, 采用常用的迭代法计算出。例如, 对于到达 $(t+\Delta t)$ 时刻 $(j+1/2)$ 格点的出发点, 其位置为

$$X_{j+\frac{1}{2}-\alpha(j-\frac{1}{2})} = X_{j+\frac{1}{2}} - \tau u_{j+\frac{1}{2}-\alpha(j-\frac{1}{2})}^n. \quad (28)$$

这里 $X_{j-\frac{1}{2}} = j\Delta x$, $\alpha(j+1/2)$ 是出发点与到达点 $(j+1/2)$ 间距离(以格点 Δx 为单位, 一般是一个非整数)。出发点的速度 $u_{j-\frac{1}{2}-\alpha(j-\frac{1}{2})}^n$ 由立方内插求出, 迭代求解(28)式可得到 α 值。上角码时间层 n 表示该变量是取 t 时刻的值, 而 $n+1$ 是取 $t+\Delta t$ 时刻的值。

出发点的网格距 δx_j 为

$$\delta x_j = X_{j+\frac{1}{2}-\alpha(j-\frac{1}{2})}^n - X_{j-\frac{1}{2}-\alpha(j-\frac{1}{2})}^n = \Delta x - \tau \delta u_j^{(1)}. \quad (29)$$

其中

$$\delta u_j^{(1)} = u_{j+1/2-x(1+1/2)}^n - u_{j-1/2-x(1-1/2)}^n. \quad (30)$$

应用 (12) 守恒格式, 并采用两层时间格式, 则 (24) ~ (26) 的离散化形式为

$$U_j^{n+1} \sqrt{\Delta x} = U_j^n \sqrt{\delta x_j} - \tau A U_j^n \sqrt{\delta x_j} - \varepsilon_n \tau^2 B_n U_j^n \sqrt{\delta x_j}, \quad (31)$$

$$V_j^{n+1} \sqrt{\Delta x} = V_j^n \sqrt{\delta x_j} - \tau A V_j^n \sqrt{\delta x_j} - \varepsilon_n \tau^2 B_n V_j^n \sqrt{\delta x_j}. \quad (32)$$

$$\phi_j^{n+1} \sqrt{\Delta x} = \phi_j^n \sqrt{\delta x_j} - \tau A \phi_j^n \sqrt{\delta x_j} - \varepsilon_n \tau^2 B_n \phi_j^n \sqrt{\delta x_j}. \quad (33)$$

其中 Δx 是标准网格 (j) 的格距, (\bar{j}) 是出发点网格。

为了保证完全能量守恒, 方程 (31) ~ (33) 右端第 2 项的差分格式为

$$- A U^n \sqrt{\delta x_j} \equiv - \sqrt{\delta x_j} \left[\frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varphi^2}{2} \right) - \mathcal{N} \right] \approx - \sqrt{\delta x_j} \left[\frac{1}{\psi_j} \left(\frac{\varphi^2}{2} \right)' - (\mathcal{N})_j \right], \quad (34)$$

$$- A V^n \sqrt{\delta x_j} \equiv - \sqrt{\delta x_j} \mathcal{N} \approx - \sqrt{\delta x_j} (\mathcal{N})_j, \quad (35)$$

$$- A \psi^n \sqrt{\delta x_j} \equiv - \sqrt{\delta x_j} \frac{\varphi}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \approx - \sqrt{\delta x_j} (u)_x \frac{\varphi}{2}. \quad (36)$$

这里

$$\begin{cases} (\overline{A})_x = \left(\frac{A_{j+1} + A_j}{2} - \frac{A_j - A_{j-1}}{2} \right) \frac{1}{\delta x_j} = \frac{A_{j+1} - A_{j-1}}{2\delta x_j}, \\ \psi_j = \sqrt{\varphi_j}. \end{cases} \quad (37)$$

4.3 守恒插值

应指出, 在上面构造的守恒格式 (12) 或 (31) ~ (33) 式中, 所说的总能量守恒是指, $n+1$ 时刻标准网格 (j) 上的总能量与 n 时刻出发点网格 (\bar{j}) 上的总能量相等。实际上, 要求 n 和 $n+1$ 时刻在标准网格 (j) 上的能量相等。为使 (\bar{j}) 网络上总能量与 n 时刻标准网格 (j) 上的总能量相等, 必须进行守恒插值, 即由 n 时刻 j 网插到 (\bar{j}) 网上。首先, 将标准网 (j) 上的总能量

$$E = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + \varphi) \varphi. \quad (38)$$

用守恒插值格式^[4]插值到 (\bar{j}) 网上; 第二步, 用已计算出 (\bar{j}) 网上的 (u, v) 或 (φ) 值, 用上式求出 (φ) 或 (u, v) 值, 具体操作如下。

4.3.1 守恒插值

我们假定能量 E (以下用 A 代表) 在 (\bar{j}) 网上的格距 δx_j 内积分平均值为

$$\overline{A}_j = \frac{1}{\delta x_j} \int_a^b A^n(x) dx. \quad (39)$$

其中 $a = X_{j-1/2-x(j-1/2)}^n$ 和 $b = X_{j+1/2-x(j+1/2)}^n$ 。为了决定 \overline{A}_j , 函数 $A^n(x)$ 必须由格点值 A_j^n 来确定。每个格点值是假定等于相应格距 ($j+1/2-x, j-1/2$) 范围内的平均值, 即

$$A_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j - \frac{1}{2}}^{x_j + \frac{1}{2}} A^n(x) dx. \quad (40)$$

与此相对应 $A^n(x)$ 的最简单的定义是假定 $A^n(x)$ 在对应的格距范围内逐段常定, 即等于格点距值,

$$A^n(x) = A_j^n, \quad x_{j-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{j+\frac{1}{2}}. \quad (41)$$

如此, (39) 式的计算就十分容易了, 用简单的长度平均即可。实际计算时, 分如下三种情况 (见图 1)。令

$$N = \{(j + \frac{1}{2}) - N[x(j + \frac{1}{2}) + 0.5]\} - \{(j - \frac{1}{2}) - N[x(j - \frac{1}{2}) - 0.5]\}. \quad (42)$$

表示在出发点 $[j + 1/2 - \alpha(j + 1/2)]$ 和 $[j - 1/2 - \alpha(j - 1/2)]$ 之间包含有 N 个完整的网格。另外, $N(x) = \text{NINT}(x)$, 它表示取最靠近 x 的整数。

(1) 当 $N = -1$, 表示出发点 $[j + 1/2 - \alpha(j + 1/2)]$ 和 $[j - 1/2 - \alpha(j - 1/2)]$ 是落在同一标准格网内, 这时有

$$d_{j_1} = \Delta x [x(j - \frac{1}{2}) + 1 - \alpha(j + \frac{1}{2})], \quad \delta x_j \bar{A}_j = d_{j_1} A_{j-1-N(x_0 + \frac{1}{2}) - 0.5}^n. \quad (43)$$

(2) 当 $N = 0$, 表示出发点 $[j + 1/2 - \alpha(j + 1/2)]$ 和 $[j - 1/2 - \alpha(j - 1/2)]$ 是落在两个相邻的格网范围内, 令 \bar{j} 表示两个出发点之间的一个半点的标准格点坐标, 即

$$\bar{j}_m = j + \frac{1}{2} - N[x(j + \frac{1}{2}) + 0.5],$$

有

$$d_{j_1} = \Delta x [(j + \frac{1}{2}) - \alpha(j + \frac{1}{2}) - \bar{j}_m], \quad d_{j_2} = \Delta x [\bar{j}_m - (j - \frac{1}{2}) + \alpha(j - \frac{1}{2})].$$

因此, (39) 为

$$\delta x_j \bar{A}_j = d_{j_1} A_{j-1-N(x_0 + \frac{1}{2}) - 0.5}^n + d_{j_2} A_{j-1-N(x_0 - \frac{1}{2}) + 0.5}^n \quad (44)$$

(3) 当 $N \geq 1$, 出发点 $[j + 1/2 - \alpha(j + 1/2)]$ 和 $[j - 1/2 - \alpha(j - 1/2)]$ 之间有 N 个标准格网, 有

$$\bar{j}_1 = j + \frac{1}{2} - N[x(j + \frac{1}{2}) + 0.5], \quad \bar{j}_2 = j - \frac{1}{2} - N[x(j - \frac{1}{2}) - 0.5],$$

$$d_{\bar{j}_1} = \Delta x [(j + \frac{1}{2}) - \alpha(j + \frac{1}{2}) - \bar{j}_1], \quad d_{\bar{j}_2} = \Delta x [\bar{j}_2 - (j - \frac{1}{2}) + \alpha(j - \frac{1}{2})],$$

$$d_i = \Delta x, \quad i = 1, \dots, N$$

因此, (39) 为

$$\delta x_j \bar{A}_j = d_{\bar{j}_1} A_{\bar{j}_1}^n + d_{\bar{j}_2} A_{\bar{j}_2}^n + \sum_{i=1}^N d_{\bar{j}_i} A_{\bar{j}_i}^n, \quad (45)$$

其中

$$j_1 = (j+1) - N[x(j + \frac{1}{2}) + 0.5], \quad j_2 = (j-1) - N[x(j - \frac{1}{2}) - 0.5].$$

参见图 1, 就很容易证明

$$\sum_j A_j^n \Delta x = \sum_j \bar{A}_j \delta x_j, \quad (46)$$

即出发点网格(\bar{j})上的总能量就等于标准网格(j)上 n 时刻的总能量。

4.3.2 高度场的计算

用上面的能量守恒插值公式可计算出在(\bar{j})网格上的能量 $E_{\bar{j}}$ 。用下面的公式可十分简便地计算出高度场。能量为

$$E_{\bar{j}} = \frac{1}{2} [(u_{\bar{j}})^2 \varphi_{\bar{j}} + (v_{\bar{j}})^2 \varphi_{\bar{j}} + (\varphi_{\bar{j}})^2] \quad (47)$$

或写为高度场 φ 变量的一元二次方程

$$(\varphi_{\bar{j}})^2 + [(u_{\bar{j}})^2 + (v_{\bar{j}})^2] \varphi_{\bar{j}} - 2E_{\bar{j}} = 0.$$

其解为

$$\varphi_{\bar{j}} = \frac{1}{2} \{ - [(u_{\bar{j}})^2 + (v_{\bar{j}})^2] \pm \sqrt{[(u_{\bar{j}})^2 + (v_{\bar{j}})^2]^2 + 8E_{\bar{j}}} \}. \quad (48)$$

只能取+号, $\varphi_{\bar{j}}$ 才不会出现负值。如此, 我们就计算出了(\bar{j})网上高度场的值。

5 计算结果

为了简化, 在计算中假定方程 (21) ~ (23) 中的科里奥利参数 $f=0$ 。这样, 三个方程构成的一维原始方程组可以变为两个方程构成的重力波方程组。初值给定为

$$u = U + u_0 \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right).$$

$$h = H + h_0 \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right).$$

其中 $U = 10 \text{ m/s}$, $H = 800 \text{ m}$, $L = 6400 \text{ km}$, $u_0 = 0.5 \text{ m/s}$ 和 $u_0 = \sqrt{H/g}$, 积分范围是由 64 个格点组成的区域, 空间格距为 $\Delta x = 100 \text{ km}$, 时间步长 $\Delta t = 100 \text{ s}$ 。

为了比较, 用传统的半拉格朗日方法积分了同样一维重力波方程, 其形式如下

$$u_j^{n+1} = u_{j-2\alpha(j)}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\delta_{2\Delta x}(\varphi)_{j-2\alpha(j)}^n].$$

$$h_j^{n+1} = h_{j-2\alpha(j)}^n - \frac{\Delta t}{g\Delta x} [\varphi \delta_{\Delta x}(u)_{j-2\alpha(j)}^n].$$

其中 $2\alpha(j)$ 是出发点 $j-2\alpha(j)$ 到到达点 (j) 之间的距离 (以 Δx 为单位); $\delta_{2\Delta x}$ 表示在标准网上 $2\Delta x$ 距离的有限差分, 而其下足码 $j-2\alpha(j)$ 是表示, 将标准网上有限差分用立方内插

插值到这个点 $j = \alpha(j)$ 上。

表 1 给出了用本文的守恒格式和传统的格式分别积分 10 000 步得到的 (间隔 1 000 步) 总能量的变化。从表中发现, 本文的守恒格式, 可保持 12 位有效数字不变化, 而传统格式仅能保持 5 位有效数字不变化。因此, 本文半拉格朗日计算格式的确保持了总能量守恒。

表 1 总能量变化列表

步数	传统格式 ($\times 10^{10}$)	守恒格式 ($\times 10^{10}$)
0	0.308 138 511 188	0.308 138 511 188
1 000	0.308 138 417 790	0.308 138 511 188
2 000	0.308 138 331 602	0.308 138 511 188
3 000	0.308 138 252 059	0.308 138 511 188
4 000	0.308 138 178 657	0.308 138 511 188
5 000	0.308 138 111 064	0.308 138 511 188
6 000	0.308 138 049 011	0.308 138 511 188
7 000	0.308 137 992 226	0.308 138 511 188
8 000	0.308 137 940 415	0.308 138 511 188
9 000	0.308 137 893 259	0.308 138 511 188
10 000	0.308 137 850 421	0.308 138 511 188

图 2 分别给出了传统格式和守恒格式积分 1103 步 (约 30.5 h) 的高值场值。在此期间, 分析解 (同样给出在图 2) 大约 5 次通过积分区域。与分析解 (实线) 比较, 守恒格式的振幅略有增大, 而传统格式的振幅略有减少, 位相都有落后。

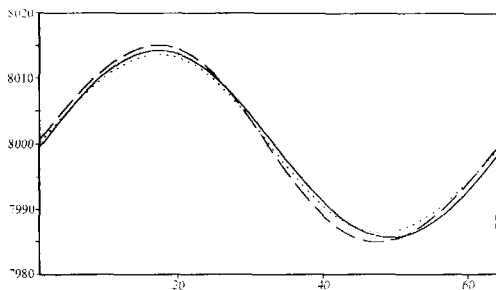


图 2 分析解 (实线)、传统格式 (点线) 和本文的平方守恒格式 (虚线) 在 30.5 h 的高度场分析
纵坐标表示高度值 (m), 横坐标表示距离 (以格点为单位)

6 结语

本文主要从理论上研究了显式完全能量守恒的半拉格朗日计算格式,并以简单的一维重力波方程作了实际计算。计算结果表明,本文提出的半拉格朗日平方守恒格式的确能保持总能量守恒,高度场分布也合理。这是一个初步的研究,下一步将研究半拉格朗日半隐式格式,并推广到二维场。

参 考 文 献

- 1 Arakawa, A., Computational design for long-term numerical integration of the equation of atmospheric motion, *J. Comput. Phys.*, 1966, **1**, 119~143.
- 2 季仲贝, 王斌, 再论发展方格差分格式的构造和应用, *大气科学*, 1991, **15**(2), 1~10.
- 3 王斌, 季仲贝, 一种省时的显式数值积分方案, *科学通报*, 1991, **36**, 2247~2250.
- 4 Machenhauer, B., The implementation of the semi-implicit scheme in cell-integrated semi-Lagrangian models, Max-Planck-Institut für Meteorologie, 1995, Rep. No. 156, 1~32.

A Study of Energy-Conserving Semi-Lagrangian Scheme

Chen Jiabin

(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

Ji Zhongzhen

*(State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics,
Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)*

Abstract A new complete energy-conserving semi-Lagrangian scheme is constructed and developed based on an energy-conserving scheme in the Eulerian space. In the construction, energy-conserving interpolation is used. The new scheme is applied to one-dimensional primitive equations. And computational results show that the new scheme is available.

Key words: semi-Lagrangian scheme; completely energy conservation; conservative interpolation