

# 自忆模式中差分格式的稳定性研究<sup>\*</sup>

封国林<sup>1)2)</sup> 董文杰<sup>3)</sup> 李建平<sup>2)</sup> 丑纪范<sup>4)</sup>

<sup>1)</sup> (扬州大学物理科学与技术学院, 扬州 225009)

<sup>2)</sup> (中国科学院大气物理研究所, 北京 100029)

<sup>3)</sup> (国家气候中心, 北京 100081)

<sup>4)</sup> (兰州大学大气科学系, 兰州 730000)

(2003 年 8 月 13 日收到; 2003 年 11 月 10 日收到修改稿)

基于大气运动是一种不可逆过程的观点, 引进了忆及过去时次资料的记忆函数, 导出热传导的自忆性方程, 研究了方程分别取 Richardson 和 DuFort-Frankel 格式, 回溯阶  $p$  取 1 时的稳定性. 探讨了多时刻模式中数值积分有时发散的问题, 揭示了由过去时次资料动态求取记忆函数, 改变了原定设计的差分格式, 且它是一个时间平滑因子的本质.

关键词: 回溯阶差分格式, 多时次, 稳定性, 记忆性

PACC: 9260X, 9260Y, 0540, 0530

## 1. 引 言

根据微分方程的经典理论, 只要给定一个时刻的初值就可以求解方程, 也就构成了数值天气预报的数学基础. 在微分方程数值计算中, 差分格式对于其精确度与有效性都极其重要. 在天气预报中, 研究和采用过多种时间积分格式<sup>[1,2]</sup>. 半隐格式是效果较好的一种, 用于动力-热力方程的某些项有较高的精确度和相对大的时间步长. 半拉格朗日格式因为可以取较大的步长, 对计算机的设备要求较低, 而计算机精确度却有所增加, 近年来日益引起人们的兴趣.

早在 20 世纪 50 年代, 顾震潮就指出数值预报只用一个初始场而经验预报运用初始时刻以前的多个时次的资料间的差异<sup>[3]</sup>. 随后我国学者先后从不同原理和准则提出了能容纳多时次资料的模式<sup>[4]</sup>. Cao 从不可逆过程的记忆概念出发, 建立了包含多时次观测资料的自忆性方程, 给出了正压无辐射模式和正压原始方程模式的自忆性方程, 能将现有的多时次数值预报模式统一在自忆性方程的框架中, 随着记忆函数的不同求取方式, 自忆性方程可构成数值、统计-动力和多时刻模式<sup>[5]</sup>. Feng 和 Cao<sup>[6]</sup> 则运

用大气自忆原理, 建立区域气候自忆预测模式, 进一步制作了月、季、年降水滚动预报模式软件. Gu<sup>[7]</sup> 还把自忆原理引入 T42、T63 谱模式. 尽管多方面的数值实验研究, 充分证实了从利用历史资料的角度改进预报途径在理论上可行, 且有一定预报效果, 但运用多时刻模式对实际问题进行业务预报研究时, 即使设计稳定的差分格式, 积分有限步后也有可能发散. 另一方面, 自提出利用历史资料预报未来的多时刻模式以来, 对它的稳定性在理论上一直都没有研究, 目前均回避了这一问题. 因此, 从理论上研究多时刻模式的稳定性很有必要, 也十分重要. 然而这项工作十分困难.

不失一般性, 本文就热传导自忆性方程, 在回溯阶  $p$  取 1 时, 空间取 Richardson 和 DuFort-Frankel 格式, 运用理论和数值计算相结合的方法, 研究记忆函数取值对方程稳定性的影响.

## 2. 数学原理

不失一般性, 大气-热力方程组可写为

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = F_i(y, \dots, t), \quad i = 1, 2, \dots, J, \quad (1)$$

$J$  为整数,  $y_i$  为第  $i$  个物理量,  $\dots$  为物理参数, 为简

<sup>\*</sup> 国家杰出青年基金(批准号:40325015)和国家自然科学基金(批准号:40275031 和 40231006)及中国科学院知识创新项目(批准号:ZKCX2-SW-210)资助的课题.

便计,以下文中只考虑一个物理量  $y$ , (1)式表达了  $y$  的局地变化与扰源函数  $F$  的关系,定义记忆函数  $(r, t)$ , 且  $| (r, t) | \leq 1$ , 式中的自忆性方程可写为<sup>[5]</sup>

$$y_t = \sum_{i=-p-1}^0 Z_i + \sum_{i=-p}^0 F(y, , t) \quad (2)$$

式中时次为  $t, t_0, t_{-1}, \dots, t_{-p}$ , 取等距时次间隔,  $t = t_{i+1} - t_i, i = (i+1 - i) / \tau, i = i / \tau, Z_i = (y_{i+1} + y_i) / 2$ , 一般地  $Z_i, F$  可由历史资料用最小二乘或遗传算法求得.

$p$  称回溯阶, 当  $p=0$  时, (2) 式称为零阶自忆性方程, 我们已证明了零阶自忆性方程与记忆函数具体形式无关<sup>[8]</sup>.  $p$  取 1 时, 称为一阶自忆性方程, 知  $t_0, t_{-1}$ , 预报  $t$  时刻, 说明了大气的未来发展不仅与上一时刻的、而且与它过去的状态有关, 即大气并不遗忘它的过去, 对这种记忆性, 在这里引进记忆函数来表征.

### 3. 稳定性研究

取  $p$  为 1, 沿用差分格式中的记号, 记  $y_j^{n+1}, y_j^n, y_j^{n-1}, \dots, x_j^{n+1}, x_j^n, x_j^{n-1}, \dots$ , 不失一般性, (1) 式等号右端取  $F(y, , t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ , 即(1)式为热传导方程, 在热力学、力学等领域有广泛的应用. (2) 式写成具体的递推关系式为

$$y_j^{n+1} - y_j^{n-1} - \frac{1}{2}(y_j^n + y_j^{n+1}) \times (r^n - r^{n-1}) - \frac{1}{2}(y_j^n + y_j^{n+1})(r^{n+1} - r^n) - r^{n-1} \tau \frac{\partial^2 y_j^{n-1}}{\partial x^2} - r^n \tau \frac{\partial^2 y_j^n}{\partial x^2} = 0. \quad (3)$$

很显然(3)式是一个三层格式, 即有  $n-1, n$  时次及预报  $n+1$  时次.

定义格式的稳定性, 若对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 存在与  $t, x$  无关的正数  $\delta = \delta(\epsilon)$ , 使得只要初始误差  $\epsilon_j^0$  及  $\epsilon_j^1 (j=1, 2, \dots, J-1)$  适合

$$\frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J-1} (\epsilon_j^0)^2 + \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J-1} (\epsilon_j^1)^2 < \delta,$$

所引起的传播误差  $\epsilon_j^n$  适合

$$\frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J-1} (\epsilon_j^n)^2 < \delta \quad (n = 2, 3, \dots, [T/\tau]),$$

则称格式是平均稳定的. 对多层差分格式稳定性定义依此类推.

### 3.1. Richardson 格式

一般地, Richardson 格式的空间微商  $\partial^2 y_j^n / \partial x^2$  取  $(y_{j+1}^n - 2y_j^n + y_{j-1}^n) / (\Delta x)^2$ , 截断误差为  $O((\Delta x)^2)$ ,  $r = \tau / (\Delta x)^2$ . (3) 式变为

$$\frac{1}{2}(r^{n+1} + r^n) y_j^{n+1} + \frac{1}{2}(r^{n-1} - r^{n+1}) y_j^n - \frac{1}{2}(r^n + r^{n-1}) y_j^{n-1} - r^{n-1} r (y_{j+1}^{n-1} - 2y_j^{n-1} + y_{j-1}^{n-1}) - r^n r (y_{j+1}^n - 2y_j^n + y_{j-1}^n) = 0.$$

误差适合  $y_j^n$  差分方程,

$$\frac{1}{2}(r^{n+1} + r^n) y_j^{n+1} + \frac{1}{2}(r^{n-1} - r^{n+1}) y_j^n - \frac{1}{2}(r^n + r^{n-1}) y_j^{n-1} - r^{n-1} r (y_{j+1}^{n-1} - 2y_j^{n-1} + y_{j-1}^{n-1}) - r^n r (y_{j+1}^n - 2y_j^n + y_{j-1}^n) = 0, \quad (4)$$

$j = 1, 2, \dots, J-1, \quad n = 1, 2, \dots, [T/\tau] - 1,$   
 $y_j^0 = 0, \quad y_j^1 = 0, \quad r = 0, 1, \dots, [T/\tau].$

(4) 式是一个变系数的误差方程, 求出它的解析解或定性分析很困难. 为了避免问题的复杂性, 假设记忆函数与空间无关, 仅认为是时间的函数. 由于记忆函数组合的误差方程的变系数与空间无关, 且规定记忆函数的取值范围为  $[-1, 1]$ , 即记忆函数取确切的数值, 用数值计算与理论相结合的方法来研究误差随时间变化的规律. 设记忆函数为线性衰减型,

$$(r_i) = \begin{cases} 1 - (t - t_i) & t \leq t_i, \\ 1 & t > t_i. \end{cases} \quad (5)$$

对于  $p=1, r^{n+1}=1, r^n=1-\alpha, r^{n-1}=1-2\alpha$ , 其中  $\alpha > 0$  的常数, 反映了记忆随时间衰减的快慢, 故称为遗忘因子. 在确定  $\alpha$  下, 则常系数差分方程(4)可写为

$$\frac{1}{2}(2 - \alpha) y_j^{n+1} + (1 - \alpha) y_j^n - \frac{1}{2}(2 - 3\alpha) y_j^{n-1} - (1 - 2\alpha) r (y_{j+1}^{n-1} - 2y_j^{n-1} + y_{j-1}^{n-1}) - (1 - \alpha) r (y_{j+1}^n - 2y_j^n + y_{j-1}^n) = 0. \quad (6)$$

用分离变量法解(6)式, 令

$$y_j^n = \lambda_j^n, \quad (7)$$

即得

$$\frac{(2 - \alpha) \lambda_j^{n+1} + 2(1 - \alpha) \lambda_j^n - (2 - 3\alpha) \lambda_j^{n-1}}{2r[(1 - 2\alpha) \lambda_j^{n+1} + (1 - \alpha) \lambda_j^n]} = \frac{\lambda_j^{n+1} - 2\lambda_j^n + \lambda_j^{n-1}}{\lambda_j^n} = \dots \quad (8)$$

显然

$$\lambda_j^n = -4\sin^2(k/2J) \quad (k = 1, 2, \dots, J-1). \quad (9)$$

相应地,

$$r_j^{(k)} = c \sin(k j/J), \quad (10)$$

则关于  $r_n$  的特征方程为

$$(2 - r_k)^2 + 2(1 - r_k)[1 - r_k] - [(2 - 3r_k) + 2(1 - 2r_k)r_k] = 0. \quad (11)$$

它的两个根为

$$r_{1,k} = \frac{-(1 - r_k)[1 - r_k] \pm \sqrt{[1 - r_k]^2/4}}{2 - r_k},$$

式中

$$= 4(1 - r_k)^2 [1 - r_k]^2 + 4(2 - r_k) \times [(2 - 3r_k) + 2(1 - 2r_k)r_k],$$

于是

$$r_n^k = c_1 r_{1,k}^n + c_2 r_{2,k}^n.$$

差分方程(6)的通解

$$r_j^n = \sum_{k=1}^{J-1} (a_k r_{1,k}^n + b_k r_{2,k}^n) \sin \frac{k j}{J}, \quad (12)$$

$a_k, b_k$  应该由给定它的初始误差  $r_j^0, r_j^1 (j = 1, \dots, J - 1)$  确定,  $c_1, c_2$  为常数.

考虑气候变化诸多因子之间既有正相关,有时也有显著的负相关,因此取  $0 < r < 2$ . 显然当  $r = 1, k > -0.5$  时,差分方程(6)有两个不相等的实根,使得  $|r_{1,k}| < 1$ , 满足差分格式的稳定性. 当  $k < -0.5$  时,(6)式随着  $r$  不同的取值,有两个不相等的实根或两个共轭复根(如图1).

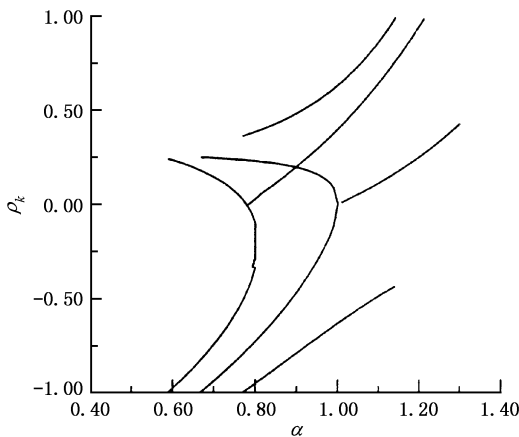


图1  $|r_{1,k}|$  随  $k$  的变化曲线

图2给出  $r_k$ , 使  $|r_{1,k}| < 1$  为稳定区域,这说明记忆函数的取值改变了差分格式,成为条件稳定.

事实上,若  $r^{n+1} = 0, r^n = 1, r^{n-1} = 0$ ,则

$$r_{1,k} = r_k + \sqrt{1 + r_k^2}, \quad r_{2,k} = r_k - \sqrt{1 + r_k^2}.$$

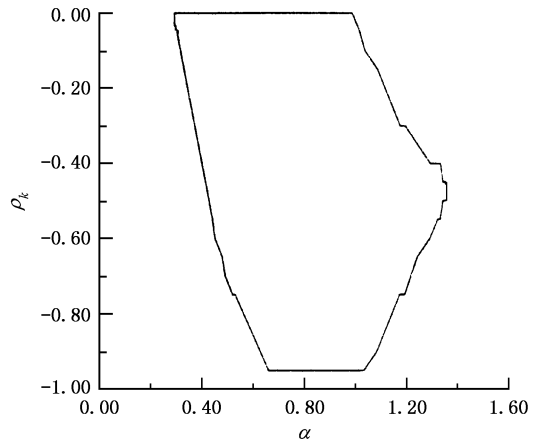


图2  $|r_{1,k}| < 1$  的稳定区域

由  $r_k < 0$ , 对任意  $r > 0, |r_{2,k}| > 1$ , Richardson 格式是不稳定的. 所以在数值计算时,此格式是不能采用的原因. 事实上,对任何  $J$  总存在  $k_0$ , 使得  $|r_{2,k_0}| > 1 + \epsilon$ , 其中  $\epsilon$  是一个与  $x$  无关的正常数,于是所引起的传播误差  $r_j^n$  适合<sup>[9]</sup>

$$\sum_{j=1}^{J-1} (r_j^n)^2 = \frac{J}{2} \frac{2^n}{2^{2k_0}} > \frac{1}{2} \frac{2^{2(n-1)}}{2^{2k_0}} \frac{J}{2} (1 + \frac{2}{2^{2k_0}}) \frac{1}{2} (1 + \frac{2}{2^{2k_0}})^{2(n-1)} \left[ \sum_{j=1}^{J-1} (r_j^0)^2 + \sum_{j=1}^{J-1} (r_j^1)^2 \right]. \quad (13)$$

由定义知 Richardson 格式不平均稳定,显然也不一致稳定,记忆函数的引入,起到了一个时间平滑因子的作用,改变了差分格式,成为有条件稳定.

### 3.2. DuFort-Frankel 格式

Richardson 格式在通常模式中绝对不稳定,而在多时刻模式中,由于记忆函数的引入,变成了条件稳定,实际数值计算中,一般采用 DuFort-Frankel 格式,即

$$\frac{\partial^2 y_j^n}{\partial x^2} \text{取} (y_{j+1}^n - y_j^{n+1} - y_j^{n-1} + y_{j-1}^n) / (\Delta x)^2;$$

$$\frac{\partial^2 y_j^{n-1}}{\partial x^2} \text{取} (y_{j+1}^{n-1} - y_j^n - y_j^{n-2} + y_{j-1}^{n-1}) / (\Delta x)^2.$$

它的截断误差

$$R_j^n = O\left( (\Delta x)^2 + O(\Delta t)^2 + O\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \right),$$

(3)式可写为

$$\frac{1}{2} (r^{n+1} + r^n) y_j^{n+1} + \frac{1}{2} (r^{n-1} - r^{n+1}) y_j^n$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} ( \binom{n}{j} + \binom{n-1}{j} ) y_j^{n-1} - \binom{n-1}{j} r ( y_{j+1}^{n-1} - y_j^n - y_j^{n-2} \\
& + y_{j-1}^{n-1} ) - \binom{n}{j} r ( y_{j+1}^n - y_j^{n+1} - y_j^{n-1} + y_{j-1}^n ) = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

显然(14)式是一个四层差分格式,它涉及  $n + 1, n, n - 1, n - 2, 4$  个时次. 类似地,记忆函数仍采用(5)式,则常微分误差方程为

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} ( 2 - \binom{n+1}{j} + ( 1 - \binom{n}{j} - \frac{1}{2} ( 2 - 3 \binom{n-1}{j} ) ) \\
& - ( 1 - 2 \binom{n-1}{j+1} - \binom{n}{j} - \binom{n-2}{j} + \binom{n-1}{j-1} ) \\
& - ( 1 - \binom{n}{j+1} - \binom{n+1}{j} - \binom{n-1}{j} + \binom{n}{j-1} ) = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

仍用分离变量法,令  $y_j^n = z_j^n$ , 即得

$$\begin{aligned}
& \frac{( 2 - \binom{n+1}{j} + 2( 1 - \binom{n}{j} - ( 2 - 3 \binom{n-1}{j} ) ) ) z_j^{n-1}}{2r[ ( 1 - 2 \binom{n-1}{j+1} + ( 1 - \binom{n}{j} ) ) z_j^n]} \\
& + \frac{2r( 1 - \binom{n}{j+1} ) ( \binom{n+1}{j} + \binom{n-1}{j} ) + 2r( 1 - 2 \binom{n-1}{j+1} ) ( \binom{n}{j} + \binom{n-2}{j} )}{2r[ ( 1 - 2 \binom{n-1}{j+1} + ( 1 - \binom{n}{j} ) ) z_j^n]} \\
& = \frac{z_j^{j+1} + z_j^{j-1}}{z_j} = \dots
\end{aligned} \tag{16}$$

首先容易求出

$$z_j = 2 \cos \frac{k}{J} \quad (k = 1, 2, \dots, J - 1),$$

相应地

$$y_j^{(k)} = c \sin \frac{k}{J} j, \tag{17}$$

其次差分方程为

$$\begin{aligned}
& [ 2 - \binom{n+1}{j} + 2( 1 - \binom{n}{j} ) r ] z_j^{n+1} + [ 2( 1 - \binom{n}{j} ) + 2( 1 - 2 \binom{n-1}{j} ) r \\
& - 2r( 1 - \binom{n-1}{j+1} ) ] z_j^n + [ 2r( 1 - \binom{n-1}{j+1} ) - 2r( 1 - 2 \binom{n-2}{j} ) \\
& - ( 2 - 3 \binom{n-1}{j} ) ] z_j^{n-1} + 2r( 1 - 2 \binom{n-2}{j} ) z_j^{n-2} = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

设(18)式的三个特解  $z_j^{n_1(k)}, z_j^{n_2(k)}$  和  $z_j^{n_3(k)}$ , 它们分别适合初始条件,

$$\begin{aligned}
& z_j^{n_1(k)} = 1, \quad z_j^{n_2(k)} = 0, \quad z_j^{n_3(k)} = 0, \\
& z_j^{n_2(k)} = 0, \quad z_j^{n_1(k)} = 1, \quad z_j^{n_3(k)} = 0, \\
& z_j^{n_3(k)} = 0, \quad z_j^{n_1(k)} = 0, \quad z_j^{n_2(k)} = 1,
\end{aligned} \tag{19}$$

于是(18)式的通解为

$$y_j^{(k)} = a_k z_j^{n_1(k)} + b_k z_j^{n_2(k)} + c_k z_j^{n_3(k)}. \tag{20}$$

因此

$$y_j^n = \sum_{k=1}^{J-1} [ a_k z_j^{n_1(k)} + b_k z_j^{n_2(k)} + c_k z_j^{n_3(k)} ] \sin \frac{k}{J} j, \tag{21}$$

则

$$0 = \sum_{k=1}^{J-1} a_k \sin \frac{k}{J} j,$$

$$z_j^{n_1} = \sum_{k=1}^{J-1} b_k \sin \frac{k}{J} j,$$

$$z_j^{n_2} = \sum_{k=1}^{J-1} c_k \sin \frac{k}{J} j,$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J-1} ( z_j^{n_1} )^2 & = \frac{J}{2} \sum_{k=1}^{J-1} [ a_k z_j^{n_1(k)} + b_k z_j^{n_2(k)} \\
& + c_k z_j^{n_3(k)} ]^2,
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{J-1} [ ( z_j^{n_1} )^2 + ( z_j^{n_2} )^2 + ( z_j^{n_3} )^2 ] \\
& = \frac{J}{2} \sum_{k=1}^{J-1} ( a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 ).
\end{aligned} \tag{22}$$

现令  $M_n = \max_k ( | z_j^{n_1(k)} |, | z_j^{n_2(k)} |, | z_j^{n_3(k)} | )$ , 并有  $( | a_k | + | b_k | + | c_k | )^2 \leq 2( a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 )$ , 就有

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{J-1} ( z_j^{n_1} )^2 & \leq 2 M_n^2 \left[ \sum_{j=1}^{J-1} ( z_j^{n_1} )^2 \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{J-1} ( z_j^{n_2} )^2 + \sum_{j=1}^{J-1} ( z_j^{n_3} )^2 \right].
\end{aligned} \tag{23}$$

事实上,  $z_j^{n_1(k)}, z_j^{n_2(k)}, z_j^{n_3(k)}$  是(18)式所对应的特征方程为

$$z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3 = 0, \tag{24}$$

式中

$$\begin{aligned}
b_1 & = [ 2( 1 - \binom{n+1}{j} ) + 2r( 1 - 2 \binom{n-1}{j+1} ) - 2( 1 - \binom{n}{j} ) r ] \\
& \quad / [ 2 - \binom{n+1}{j} + 2( 1 - \binom{n}{j} ) r ], \\
b_2 & = [ 2r( 1 - \binom{n-1}{j+1} ) - 2r( 1 - 2 \binom{n-2}{j} ) - ( 2 - 3 \binom{n-1}{j} ) ] \\
& \quad / [ 2 - \binom{n+1}{j} + 2( 1 - \binom{n}{j} ) r ], \\
b_3 & = 2r( 1 - 2 \binom{n-2}{j} ) / [ 2 - \binom{n+1}{j} + 2( 1 - \binom{n}{j} ) r ].
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
p & = - b_1^2 / 3 + b_2, \\
q & = 2 b_1^3 / 27 - b_1 b_2 / 3 + b_3, \quad z = u + v,
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
uv & = - p / 3, \quad u^3 + v^3 = - q, \\
s & = ( q / 2 )^2 + ( p / 3 )^3.
\end{aligned}$$

设  $A, B$  分别是满足条件  $uv = - p / 3$  的  $u, v$  值, 则(24)式的三个根为

$$\begin{aligned}
z_1^{(k)} & = A + B, \\
z_2^{(k)} & = - 0.5(A + B) + i(A - B) \sqrt{3} / 2, \\
z_3^{(k)} & = - 0.5(A + B) - i(A - B) \sqrt{3} / 2.
\end{aligned} \tag{25}$$

当且仅当  $z_1^{n_1} = 1, z_2^{n_1} = 0, z_3^{n_1} = 0$ , 则

$$\begin{aligned}
z_1^{(k)} & = 0, \\
z_{2,3}^{(k)} & = \frac{2 \cos \left( \frac{k}{J} \right) \pm \sqrt{1 - 4 \sin^2 \frac{k}{J}}}{2r + 1}.
\end{aligned} \tag{26}$$

于是易知

$$\begin{aligned}
n_2(k) &= -\frac{\binom{k}{2} \binom{k}{3} \left( \frac{\binom{k}{2}^{n-1} - \binom{k}{3}^{n-1} \right)}{\binom{k}{2} - \binom{k}{3}} \\
&= -\frac{\binom{k}{2} \binom{k}{3} \left[ \left( \frac{\binom{k}{2}^{n-2} + \binom{k}{2}^{n-3} \binom{k}{3} \right) \right. \\
&\quad \left. + \dots \left( \frac{\binom{k}{3}^{n-2} \right) \right]}{\binom{k}{2} - \binom{k}{3}}, \\
n_3(k) &= -\frac{\binom{k}{2} \binom{k}{3} \left( \frac{\binom{k}{2}^n - \binom{k}{3}^n \right)}{\binom{k}{2} - \binom{k}{3}} \\
&= \left[ \left( \frac{\binom{k}{2}^{n-1} + \binom{k}{2}^{n-2} \binom{k}{3} \right) \right. \\
&\quad \left. + \dots \left( \frac{\binom{k}{3}^{n-1} \right) \right]. \tag{27}
\end{aligned}$$

由于  $\left| \frac{\binom{k}{i}}{\binom{k}{j}} \right| < 1$ , 且  $\left| \frac{\binom{k}{i}}{\binom{k}{j}} \right| < 1$ , 因此  $\left| \frac{n_i(k)}{n_j(k)} \right| (i = 1, 2, 3)$  是一致有界的, 即  $M_n \leq M, M$  是与  $x$  等无关的常数, 此时, DuFort-Frankel 格式是平均稳定的.

图 3 给出  $k$ , 使  $\left| \frac{\binom{k}{i}}{\binom{k}{j}} \right| < 1 (i = 1, 2, 3)$  为稳定区域, 尽管设计 DuFort-Frankel 格式在一般数值模式中是平均稳定的, 但在自忆模式中, 由于记忆函数的取值, 是由于历史资料用最小二乘来确定的, 在  $[-1, 1]$  区间是不确定的, 因此它改变了差分格式, 破坏了其稳定性.

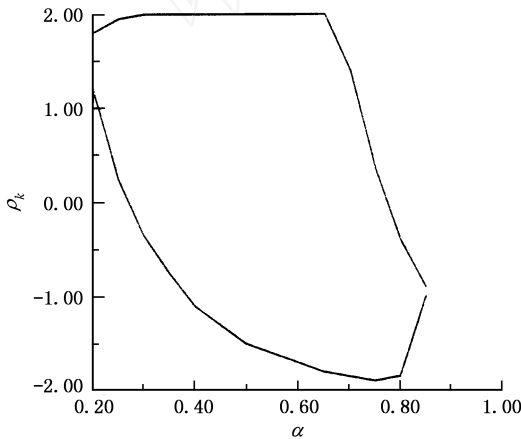


图 3 DuFort-Frankel 格式下的稳定区域

图 4 给出  $k$ , 使  $\left| \frac{\binom{k}{i}}{\binom{k}{j}} \right| < 1 (i = 1, 2, 3)$  为稳定区域的等值线图, 图中等值线图为  $\left| \frac{\binom{k}{i}}{\binom{k}{j}} \right| < 1$ , 也只有局部的取值满足差分格式的稳定性.

### 4. 自记忆方程与差分格式的关系

事实上, (2) 式若给出记忆函数一些数字就能构造出不同的差分格式, 即

$$y^{n+1} - y^n - \left( \frac{y^{n+1} - y^n}{t} \right) y_0^m = \sum_{i=n}^{n+1} F_i t. \tag{28}$$

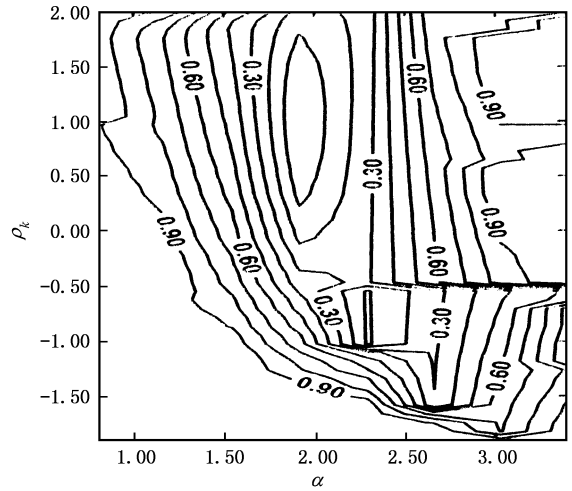


图 4  $\left| \frac{\binom{k}{i}}{\binom{k}{j}} \right| < 1$  的稳定区域等值线图

若令  $y_0^m = 1, y_0^n = y_0^{n+1}$ , 得隐式差分格式  $(y^{n+1} - y^n) / t = F^{n+1}$ .

若令  $y_0^m = 1, y_0^n = 1$ , 得双时间层的隐式差分格式

$$(y^{n+1} - y^n) / t = F^n + F^{n+1}.$$

若令  $y_0^m = 1, y_0^n = 0, y_0^{n+1} = 1$ , 得前向差分格式

$$(y^{n+1} - y^n) / t = F^n.$$

因此不难推断, 若记忆函数取时间和空间而变的一些适当数字, 就可构造出现有的差分格式, 还能设计出至今尚无的新格式. 例如一维平流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{29}$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -C \frac{\partial u}{\partial x} - F, \tag{30}$$

式中  $x$  为空间坐标,  $C$  为常定平流速度. 对空间  $r$  点, 与 (2) 式类似, 自忆性方程为

$$\begin{aligned}
u(j, t) &= u(j, t-p) \\
&+ \sum_{i=j-p}^j [u(j, t_{i+1}) - u(j, t_i)] u^m(j, t_i) \\
&- C \int_{t-p}^t u(j, \tau) \frac{\partial u(j, \tau)}{\partial x} d\tau. \tag{31}
\end{aligned}$$

若以 (31) 式作预报, 要用到  $t$  时刻以前的  $u(t_i)$  的  $p$  个值和  $F(t_i)$  的  $p$  个场, 所以在 (31) 式中,  $(t_i)$  的作用是记忆  $p+1$  的  $u$  值和  $p+1$  的  $F$  场. 这是我们称其为记忆函数的原因, 也是提出记忆动力学的数学基础. 采用在差分格式中使用的符号, 即令

$$u_j^{n+1}(j, t), \quad u_j^{n-1}(j, t-1), \dots,$$

$$u_j^{n+1} = u(j, t), \quad u_{j+1}^{n+1} = u(j+1, t), \dots,$$

$$\mu = -C t / x,$$

对  $n - p$  至  $n + 1$  的积分以求和来代替,空间则采用中央差分,回溯阶为  $p$ , (31) 式的回溯格式为

$$u_j^{n+1} = -_p u_j^{n-p} + \sum_{i=-p}^0 i (u_j^{n+i})^m + \sum_{i=-p}^1 (i u_{j+1}^{n+i} - \bar{i} u_{j-1}^{n+i}), \quad (32)$$

式中

$$-p = \frac{n-p}{j} / \frac{n+1}{j}, \quad i = \left( \frac{n+i+1}{j} - \frac{n+i}{j} \right) / \frac{n+1}{j},$$

$$i = \mu \frac{n+i}{j+1} / 2 \frac{n+1}{j}, \quad \bar{i} = \mu \frac{n+i}{j-1} / 2 \frac{n+1}{j}.$$

令

$$p = 1, \quad \frac{n+1}{j} = \frac{n}{j} = \frac{n-1}{j} = 1, \quad \frac{n+1}{j+1} = \frac{n+1}{j-1} = 0,$$

$$\frac{n}{j+1} = \frac{n}{j-1} = 2, \quad \frac{n-1}{j+1} = \frac{n-1}{j-1} = 0,$$

则 (32) 式为

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + \mu (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \quad (33)$$

这就是蛙跃差分格式. 如果取定不同的  $i, \bar{i}, \bar{i}$  和  $(u_j^{n+i})^m$ , 就可以得到种种不同的差分格式, 这可能是构造回溯格式的一个丰富多彩的结果. 若令

$$\frac{n+1}{j} = \frac{n}{j} = \frac{n}{j+1} = \frac{n}{j-1} = 1,$$

$$\frac{n-1}{j} = \frac{n-1}{j+1} = \frac{n-1}{j-1} = \mu,$$

$$(u_j^{n-1})^m = (u_j^n + u_j^{n-1}) / 2,$$

$$(u_j^n)^m = (u_j^{n+1} + u_j^n) / 2,$$

(32) 式成为

$$u_j^{n+1} = {}_0 u_j^n + {}_1 u_{j+1}^{n-1} + {}_0 (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + {}_1 (u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}), \quad (34)$$

式中

$${}_0 = (1 - \mu) / 2, \quad {}_1 = (1 + \mu) / 2,$$

$$\mu = -C t / x, \quad {}_0 = \mu / 2,$$

$${}_1 = {}_0.$$

令  $\mu = 1$ , 则

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + \frac{\mu}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n + u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}). \quad (35)$$

这就是 Crank-Nicolson 差分格式.

令  $\mu = 1/2$ , 则

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{4} u_j^n + \frac{3}{4} u_j^{n-1} + \frac{\mu}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\mu}{4} (u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}). \quad (36)$$

如果以蛙跃差分格式与之比较, 明显地看到在对  $u_j^{n+1}$  的预报中包含了  $u_j^n, u_{j+1}^{n-1}$  和  $u_{j-1}^{n-1}$  的信息.

令  $\mu = 0$ , 则

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} u_j^n + \frac{1}{2} u_j^{n-1} + \frac{\mu}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

令  $\mu = -1$ , 则

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\mu}{2} [(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - (u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1})]. \quad (37)$$

从 (35) 至 (37) 式可以看出, 给定不同的记忆函数, 差分格式即有相应的变化. 毫无疑问, 其中有些差分格式不稳定. 但在多时刻模式, 自记忆函数是动态求取的, 这给预报过程中如何判别差分格式是稳定的带来了困难. 不仅如此, 非线性差分格式的稳定性不仅与空间、时间差分格式的具体形式有关, 还与初始条件有关<sup>[11-19]</sup>. 在多时刻模式中, 记忆函数由历史资料确定, 因此可预见多时刻模式的差分格式的稳定性研究无疑很复杂.

## 5. 结 论

在多时刻模式中引进了记忆函数, 使用过去时次资料, 充分提取有用信息成为可能, 但自忆性方程的稳定性一直困扰着多时刻模式的进一步深入研究和利用预报, 通常积分到有限步数, 其计算结果就不甚理想, 或发散. 记忆系数的确定是通过最小二乘或遗传算法来确定的, 并且是一个动态过程, 引入记忆函数在时间上起到一个平滑的作用<sup>[8]</sup>, 过去时次资料来确定的动态记忆函数, 改变了模式方程设计的差分格式, 使得差分格式变得不稳定. 因此在多时刻模式设计中, 必须对记忆函数的取值范围有一个正确的估计, 另外每向前迭代一步, 求出记忆函数通过回溯阶  $p$  对应下的本征值方程来判断格式的稳定性, 以保证自忆模式的可靠性和预报的准确性.

[1] Robert A 1981 *Atmos-Ocean*. **19** 35  
 [2] O'Brien J J 1986 *Time Integration Schemes Advanced Physical Oceanographic Numerical* (Reidel: NATO ASI Series)  
 [3] Koo C C et al 1958 *Acta Meteor. Sin.* **29** 176 (in Chinese) [ 顾震潮等 1958 气象学报 **29** 176]  
 [4] Chou J F 1974 *Sci. China* **17** 814  
 [5] Cao H X 1993 *Sci. China B* **26** 845  
 [6] Feng GL and Cao H X 1999 *J. Appl. Meteor.* **10** 470 (in Chinese)

- [封国林、曹鸿兴 1999 应用气象学报 10 470]
- [7] Gu X Q 1998 *Chin. Sci. Bull.* **43** 1692
- [8] Feng GL and Cao H X 1998 *J. Appl. Meteor.* **9** 219 (in Chinese)  
[封国林、曹鸿兴 1998 应用气象学报 9 219]
- [9] Hu Z C *et al* 1988 *Difference Method of the Initial Problem on Differential Equation* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [胡祖炽等 1988 偏微分方程初值问题的差分方法 (北京:北京大学出版社)]
- [10] Cao H X and Feng G L 2000 *J. Appl. Meteor.* **11** 112 (in Chinese) [曹鸿兴、封国林 2000 应用气象学报 11 112]
- [11] Lin W T, Ji Z Z and Wang B 2001 *Adv. Atmos. Sci.* **18** 413
- [12] Wang B *et al* 1993 *Chin. Sci. Bull.* **38** 230
- [13] Feng GL *et al* 2002 *Acta Mech. Sin.* **18** 53
- [14] Feng S D *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1207 (in Chinese) [冯士德等 2001 物理学报 50 1207]
- [15] Feng GL, Cao H X, Dong W J and Chou J F 2001 *Chin. Phys.* **10** 1004
- [16] Feng S D 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1006 (in Chinese) [冯士德 2001 物理学报 50 1006]
- [17] Feng GL and Dong W J 2003 *Chin. Phys.* **12** 1076
- [18] Liu M R *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1800 (in Chinese) [刘慕仁等 1999 物理学报 48 1800]
- [19] Cao Q J *et al* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2166 (in Chinese) [曹庆杰等 1997 物理学报 46 2166]

## On the stability of the difference scheme in the self-memorization model \*

Feng Guo-Lin<sup>1)2)</sup> Dong Weir-Jie<sup>3)</sup> Li Jiar-Ping<sup>2)</sup> Chou Ji-Fan<sup>4)</sup>

<sup>1)</sup> (Department of Physics, Yangzhou University, Yangzhou 225009, China)

<sup>2)</sup> (Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China)

<sup>3)</sup> (National Climatic Center, Beijing 100081, China)

<sup>4)</sup> (Department of Meteorological Sciences, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

(Received 13 August 2003; revised manuscript received 10 November 2003)

### Abstract

In light of irreversibility of atmospheric motion, the memory function obtained by utilizing the previous information fully obtained from the observational data is introduced. The self-memorization equation of the heat conduction equation is induced, and the stability and characteristics of which are studied, taking respectively Richardson scheme (RS) and DuFort-Frankel scheme (DS) as the retrospective order  $p = 1$ . The calculation results indicate that the numerical integral is diffused sometimes in the multi-time model, due to the fact that the memory function is determined by the observational data via the special mathematics arithmetic, which makes the difference scheme designed previously change, and is a smooth time factor in itself.

**Keywords:** retrospective difference scheme, multi-time model, stability, memorization

**PACC:** 9260X, 9260Y, 0540, 0530

\* Project supported by the Funds for Outstanding Young Researchers from the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40325015), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40275031 and 40231006), and the Major Project of Knowledge Innovation Program of Chinese Academy of Sciences (Grant No. ZKX2-SW-210).