

# 混沌系统可预报期限随初始误差变化规律研究<sup>\*</sup>

丁瑞强 李建平<sup>†</sup>

(中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

(2007 年 10 月 17 日收到, 2008 年 8 月 13 日收到修改稿)

利用非线性误差增长理论计算了 Logistic 映射和 Lorenz 系统可预报期限随初始误差的变化, 发现 Logistic 映射等简单混沌系统的可预报期限与初始误差的对数存在线性关系. 在非线性误差增长理论的框架下, 理论分析表明, 平均误差增长达到一定值时, 误差增长进入明显的非线性增长阶段, 最终达到饱和; 对于一个确定的混沌系统, 在控制参数固定的情况下误差增长的饱和值也是固定的, 因此可预报期限只依赖于初始误差. 在可预报期限与初始误差对数存在的线性函数关系式中, 线性系数与最大 Lyapunov 指数有关, 在已知混沌系统的最大 Lyapunov 指数和某个固定初始误差的可预报期限的条件下, 利用可预报期限与初始误差对数的线性函数关系可以外推得到任意固定初始误差的可预报期限.

关键词: 非线性局部 Lyapunov 指数, 可预报期限, 初始误差, 混沌系统

PACC: 0545

## 1. 引 言

自从 Lorenz 在可预报研究领域的开创性工作以来, 关于混沌系统的可预报性与初始误差的关系已有了较多的研究, 但这些研究主要集中于大气等自由度很大的复杂系统<sup>[1-3]</sup>. 由于这些复杂系统的模式方程和观测资料存在着很大的不确定性, 所得的结论也有很大的不确定性. 另外, 大气等具有多尺度运动的系统被认为具有内在的可预报上限, 无论初始误差多么小, 系统的可预报期限都不会超过这个上限<sup>[4]</sup>. 对于 Logistic 映射、Lorenz 系统和 Rössler 系统等相对简单的混沌系统, 可预报性连续地依赖于初始误差, 初始误差越小, 系统的可预报期限将越长<sup>[5, 6]</sup>. 以前关于这类系统的可预报性与初始误差关系的研究主要建立在线性误差动力学基础上<sup>[7, 8]</sup>, 认为可预报时间尺度  $T_p = \frac{1}{\Delta_1} \ln\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)$ , 其中  $\Delta_1$  为最大 Lyapunov 指数,  $\delta_0$  为初始误差,  $\delta$  为预报误差上限, 其值可根据实际需要确定. 由于线性误差动力学的局限性<sup>[9, 10]</sup>, 上述  $T_p$  的表达式只有在  $\delta_0$  和  $\delta$  都比较小时才成立, 当  $\delta$  较大时将不再适用. 由此可知, 建立在线性误差动力学基础上的可预报性与初始

误差关系式适用范围十分有限, 而且预报误差上限  $\delta$  的确定也带有明显的人为因素. 因此, 为了研究混沌系统的可预报期限与初始误差的关系, 可预报性研究应该建立在非线性误差增长动力学基础上.

为了克服线性误差增长理论在可预报性研究中的局限, 李建平等<sup>[11-14]</sup>对非线性系统的误差发展方程不作线性化近似, 直接用原始的误差发展方程来研究初始误差的发展, 在此基础上引入了非线性局部 Lyapunov 指数的概念, 发展了一种非线性误差增长理论. 非线性误差增长理论一个最大的优点就是可以定量地估计混沌系统的可预报期限. 本文首先介绍了非线性局部 Lyapunov 指数的定义以及可预报期限的确定, 然后以 Logistic 映射和 Lorenz 系统为例, 利用非线性误差增长理论计算了其可预报期限随初始误差的变化, 从理论上提出了混沌系统的可预报期限与初始误差之间存在的关系式, 并用实例对该关系式进行了验证.

## 2. 非线性局部 Lyapunov 指数及混沌系统可预报期限的确定

研究一类  $n$  维非线性动力系统

<sup>\*</sup> 国家重点基础研究发展规划(批准号 2006CB403600)和国家自然科学基金(批准号 40325015, 40675046)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: ljp@lasg.iap.ac.cn

$$\frac{d}{dt}x(t) = F[x(t)], \quad (1)$$

式中

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T,$$

$$F[x(t)] = (F_1(x(t)), F_2(x(t)), \dots, F_n(x(t)))^T,$$

其中上标 T 表示转置.

假设  $\delta x(t_0)$  为  $t = t_0$  初始时刻叠加在  $x(t_0)$  上的小误差, 不作切线性近似, 误差  $\delta x(t)$  在相空间随时间的演化满足

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta x(t) &= J(x(t))\delta x(t) \\ &+ G(x(t), \delta x(t)), \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $J(x(t))\delta x(t)$  是切线性项,  $J(x(t))$  是 Jacobi 矩阵,

$$J_{ij} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j},$$

$G(x(t), \delta x(t))$  是关于误差  $\delta x(t)$  的高阶非线性项. 对误差演化方程 (2) 不作任何近似, 保留所有的非线性项, 误差演化方程的解可以从  $t = t_0$  到  $t_0 + \tau$  进行数值积分, 我们可得到

$$\delta x(t_0 + \tau) = \eta(x(t_0), \delta x(t_0), \tau)\delta x(t_0), \quad (3)$$

式中  $\eta(x(t_0), \delta x(t_0), \tau)$  为非线性误差传播算子, 它不同于对方程 (2) 作切线性近似后得到的线性误差传播算子  $M(x(t_0), \tau)$ <sup>[15, 16]</sup>. 由 (3) 式可以定义非线性局部 Lyapunov 指数如下:

$$\lambda(x(t_0), \delta x(t_0), \tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\|\delta x(t_0 + \tau)\|}{\|\delta x(t_0)\|}. \quad (4)$$

这里  $\lambda(x(t_0), \delta x(t_0), \tau)$  不仅依赖于相空间中参考轨道的初始状态  $x(t_0)$  和演化时间  $\tau$ , 还与初始误差  $\delta x(t_0)$  有关, 这与前人定义的局部或有限时间 Lyapunov 指数<sup>[15, 16]</sup>完全不同. 为了方便, 下面将误差向量  $\delta x(t)$  的大小表示为  $\delta(t) = \|\delta x(t)\|$ . 在  $\delta(t_0) \rightarrow 0$  和  $\tau \rightarrow \infty$  的双重限制条件下, 非线性局部 Lyapunov 指数将趋向全局最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_1$ <sup>[8]</sup>.

非线性局部 Lyapunov 指数可以表征初始误差在有限时间内的平均非线性增长率, 它随着  $x(t_0)$  的变化而有所不同, 很好地反映了吸引子的局部动力学特征. 如果要从整体上对非线性系统的动力学特性进行研究, 需要引入整体系统平均的非线性局部 Lyapunov 指数

$$\bar{\lambda}(\delta x(t_0), \tau) = \lambda(x(t_0), \delta x(t_0), \tau)_N, \quad (5)$$

式中  $\cdot_N$  表示  $N(N \rightarrow \infty)$  个样本的集合平均. 误差

的平均相对增长  $\bar{E}(\delta x(t_0), \tau)$  可以表示为整体系统平均的非线性局部 Lyapunov 指数的指数形式, 即

$$\bar{E}(\delta x(t_0), \tau) = \exp(\bar{\lambda}(\delta x(t_0), \tau)\tau). \quad (6)$$

由 (4)–(6) 式可得

$$\bar{E}(\delta x(t_0), \tau) = \exp\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \frac{\delta_i(t_0 + \tau)}{\delta_i(t_0)}\right). \quad (7)$$

对于数值相同的初始误差  $\delta(t_0)$ , 我们有

$$\bar{E}(\delta x(t_0), \tau) = \left(\prod_{i=1}^N \delta_i(t_0 + \tau)\right)^{1/N} / \delta(t_0). \quad (8)$$

对于一个混沌系统, 随着  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $\delta_1(t_0 + \tau), \delta_2(t_0 + \tau), \dots, \delta_N(t_0 + \tau)$  相互独立, 并且收敛到同一分布<sup>[17, 18]</sup>. 由文献 [12] 中提出的定理可知, 误差的平均相对增长以概率意义收敛到一个常数, 即

$$\bar{E}(\delta x(t_0), \tau) \xrightarrow{P} c \quad (N \rightarrow \infty).$$

这里  $c$  被看作是  $\bar{E}(\delta x(t_0), \tau)$  的理论饱和值,  $\xrightarrow{P}$  表示概率意义收敛. 误差增长达到饱和就意味着系统的初始信息全部丢失, 预测失去意义, 因此利用这个饱和值, 混沌系统的可预报期限能被定量地确定 (这里的可预报期限  $T_p$  对应着一个平均的时间长度, 由于初始扰动在整个吸引子上的传播, 因而超出  $T_p$  预测将完全失去意义).

### 3. Logistic 映射和 Lorenz 系统的可预报期限随初始误差的变化

Logistic 映射的方程为

$$y_{n+1} = ay_n(1 - y_n) \quad (0 \leq a \leq 4). \quad (9)$$

这里我们选取参数  $a = 4.0$ , 对于这个参数值 Logistic 映射在 (0, 1) 区间表现出完全的混沌行为<sup>[19]</sup>. 图 1 给出了 Logistic 映射在不同  $\delta(t_0)$  条件下  $\bar{\lambda}(\delta x(t_0), n)$  以及  $\ln \bar{E}(\delta x(t_0), n)$  随  $n$  的变化. 由图 1 可见, 对于不同大小的初始误差, 开始一段时间平均非线性局部 Lyapunov 指数基本上都为常数, 并且保持常数的时间随着  $\delta(t_0)$  的减小而变长, 最后随着  $n$  的增大,  $\bar{\lambda}(\delta x(t_0), n)$  都逐渐减小并趋向于零. 这说明对于相对较小的初始误差, 在刚开始的一段时间内误差的增长可以由误差切线性发展方程来描述, 这时平均非线性局部 Lyapunov 指数基本上保持一常数 (常数基本上等于全局最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_1$ ). 然而, 随着误差的增长非线性作用也越来越大, 在达到一个临界时间后 (这个临界时间与初始误差有关),

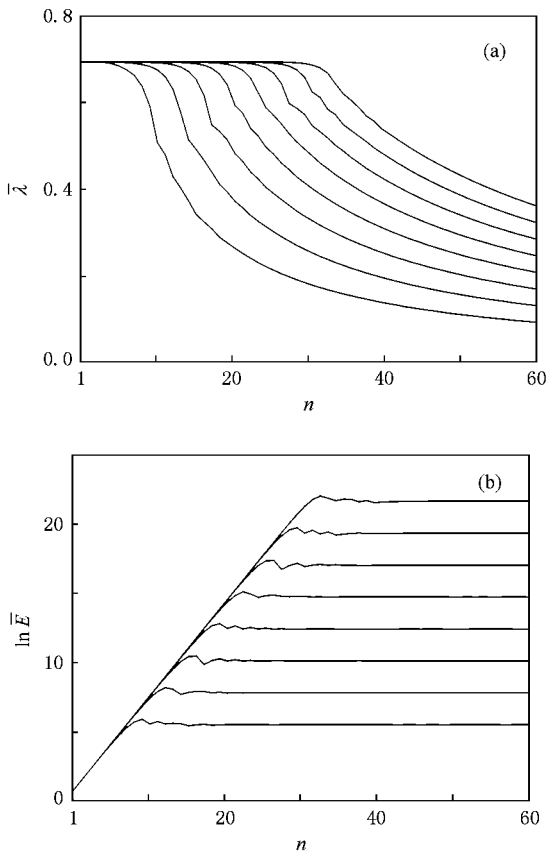


图 1 Logistic 映射在不同初始误差条件下的平均非线性局部 Lyapunov 指数  $\bar{\lambda}(\delta x(t_0), n)$  及误差平均相对增长  $\bar{E}(\delta x(t_0), n)$  的自然对数随  $n$  的变化. 曲线从上到下对应的  $\delta(t_0)$  值分别为  $10^{-10}, 10^{-9}, 10^{-8}, 10^{-7}, 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}$  和  $10^{-3}$ . (a)  $\bar{\lambda}(\delta x(t_0), n)$  (b)  $\ln \bar{E}(\delta x(t_0), n)$

误差的增长不再用误差切线性发展方程来描述, 误差增长率开始下降. 相应地,  $\bar{E}(\delta x(t_0), n)$  也有类似的变化, 随着  $\delta(t_0)$  的减小达到饱和的时间也变长, 但是不论  $\delta(t_0)$  多小, 最终还是达到饱和(图 1 (b)). 由以上所述可知, 对于一个初始误差, 存在一个对应的临界时间, 当小于这个临界时间, 非线性局部 Lyapunov 指数保持为常数, 误差切线性发展方程可以描述误差的增长情况, 当大于这个临界时间, 误差的增长处于非线性阶段, 误差切线性发展方程失效, 定义这个时间为误差的线性增长阶段临界时间. 类似于文献 [11—14], 如果将初始误差演化到误差饱和值的 99% 时所对应的时间定义为可预报期限, 可以得到 Logistic 映射的可预报期限随初始误差的变化, 结果如图 2 所示. 从图 2 可以看出, Logistic 映射的可预报期限随着初始误差的对数的增大线性地减少, 其误差线性增长阶段临界时间与初始误差的

对数关系也是如此, 并且可预报期限与误差线性增长阶段临界时间之间的间隔随初始误差基本没有变化.

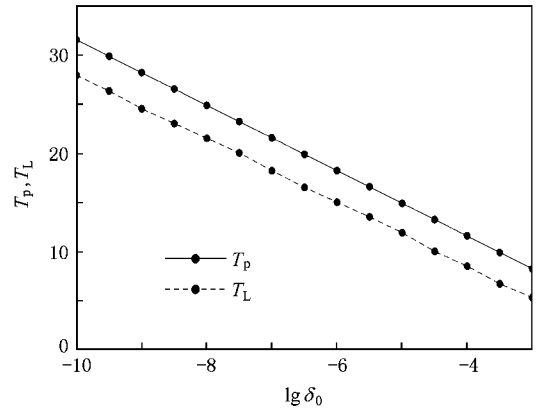


图 2 Logistic 映射的可预报期限  $T_p$  及其误差线性增长阶段临界时间  $T_L$  随初始误差  $\delta(t_0)$  的变化

Lorenz 系统<sup>[20]</sup>的方程为

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ, \\ \dot{Z} &= XY - bZ. \end{aligned} \quad (10)$$

这里我们选取参数  $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$ . 图 3 是 Lorenz 系统的可预报期限及其误差线性增长阶段临界时间随初始误差  $\delta(t_0)$  的变化. 从图 3 可以看出, 与 Logistic 映射的情形相同, Lorenz 系统的可预报期限及其误差线性增长阶段临界时间都随着初始误差的对数的增大呈线性地减少, 且其可预报期限与误差线性增长阶段临界时间两者之间的间隔随初始误差的变化基本上保持不变.

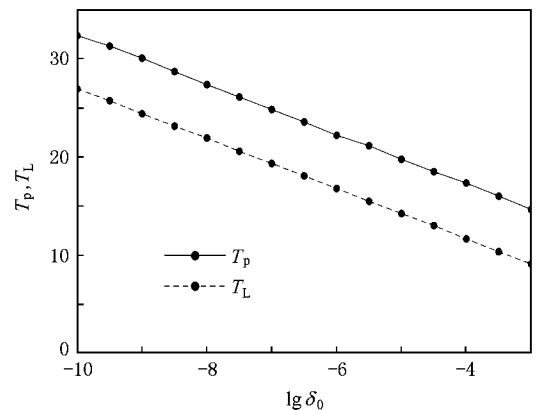


图 3 Lorenz 系统的可预报期限  $T_p$  及其误差线性增长阶段临界时间  $T_L$  随初始误差  $\delta(t_0)$  的变化

## 4. 理论分析

由上述数值试验结果可知,通过将非线性误差增长理论应用于 Logistic 映射和 Lorenz 系统,发现这两个混沌系统的可预报期限都随着初始误差的对数的增大呈线性地减少.为了阐明这个规律的普遍意义和广泛的使用价值,有必要从理论上给予解释和验证.对于 Logistic 映射等简单混沌系统,假设其可预报期限  $T_p$  可分为如下两部分:

$$T_p = T_L + T_N, \quad (11)$$

式中  $T_L$  为系统的误差线性增长阶段临界时间,  $T_N$  为从  $T_L$  开始后误差增长进入非线性增长阶段到达误差饱和时所需的时间.当平均误差增长达到临界值  $\delta_c$  时(对某一确定的混沌系统,在系统参数给定的条件下这个值可认为是不变的),误差的增长不能再由误差切线性发展方程来描述,误差增长进入明显的非线性增长阶段,最终达到饱和.在混沌系统参数给定条件下,误差饱和值  $E^*$  不随初始误差变化,因此误差从  $\delta_c$  增长到  $E^*$  所需时间  $T_N$  可以认为是不变的,这可以从图 2 和图 3 中的试验结果得到验证,Logistic 映射和 Lorenz 系统的可预报期限与误差线性增长阶段临界时间两者之间的间隔随初始误差基本不变.这样,  $T_N$  可以用一个常数  $C_1$  表示,即

$$T_N = C_1. \quad (12)$$

误差线性增长阶段临界时间满足如下关系:

$$\delta_c = \delta_0 \exp(\Lambda_1 T_L),$$

式中  $\delta_0$  为初始误差,  $\Lambda_1$  为最大 Lyapunov 指数.由此可以得到

$$T_L = \frac{1}{\Lambda_1} \ln\left(\frac{\delta_c}{\delta_0}\right). \quad (13)$$

由(11)–(13)式可得

$$T_p = C_1 + \frac{1}{\Lambda_1} [\ln \delta_c - \ln \delta_0]. \quad (14)$$

在混沌系统参数固定的情况下,  $\Lambda_1$  不变,  $\frac{1}{\Lambda_1} \ln \delta_c$  也可被认为是的,即有

$$\frac{1}{\Lambda_1} \ln \delta_c = C_2,$$

式中  $C_2$  为常数.因此我们有

$$T_p = C - \frac{1}{\Lambda_1} \ln \delta_0, \quad (15)$$

式中  $C = C_1 + C_2$ . 将(15)式的形式改变为

$$T_p = C - \frac{1}{\Lambda_1} \frac{\lg \delta_0}{\lg e}. \quad (16)$$

在已知最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_1$  和  $C$  的情况下,可以利用(16)式获得任意固定初始误差的可预报期限.  $C$  可以利用非线性误差增长理论先求得某一个固定初始误差的可预报期限,然后利用(16)式求得.

## 5. 实例验证

### 5.1. Logistic 映射

利用 Wolf 等<sup>[21]</sup>计算 Lyapunov 指数的方法,可以得到  $a = 4.0$  时 Logistic 映射的最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_1 = 0.693$ . 从(16)式可以得到 Logistic 映射的可预报期限与初始误差的关系,即

$$T_p = C - 3.32 \lg \delta_0. \quad (17)$$

利用非线性误差增长理论,可以求得  $\delta_0 = 10^{-6}$  时 Logistic 映射的可预报期限为  $T_p = 18$ , 则可以得到(17)式中的  $C = -1.92$ . 利用(17)式外推可以得到其他固定误差的可预报期限,与利用非线性误差增长理论计算的实际可预报期限相比较,发现两者符合很好(图 4). 这说明以上理论分析是正确的,完全可以利用(17)式外推得到任意固定初始误差的可预报期限.

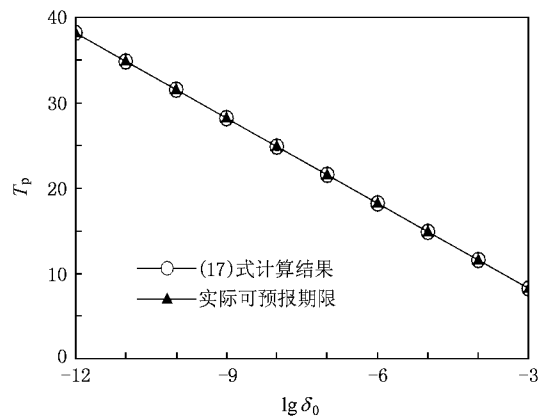


图 4 利用(17)式得到 Logistic 映射的可预报期限和利用非线性误差增长理论计算得到的实际可预报期限随初始误差的变化

### 5.2. Lorenz 系统

在  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$  条件下,可以得到 Lorenz 系统的最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_1 = 0.906$ , 同样可以从(16)式得到 Lorenz 系统的可预报期限与初始误差的关系,即

$$T_p = C - 2.54 \lg \delta_0. \quad (18)$$

利用非线性误差增长理论,可以求得  $\delta(0) = 10^{-6}$  时 Lorenz 系统的可预报时限为  $T_p = 22.19$ , 进一步可以求得(18)式中的  $C = 6.95$ . 利用(18)式外推同样可以得到其他给定初始误差的可预报时限,与利用非线性误差增长理论计算得到的实际可预报期限也十分符合(图5). 这进一步验证了可预报期限与初始误差的对数所存在的线性关系对于不同的简单混沌模型都成立.

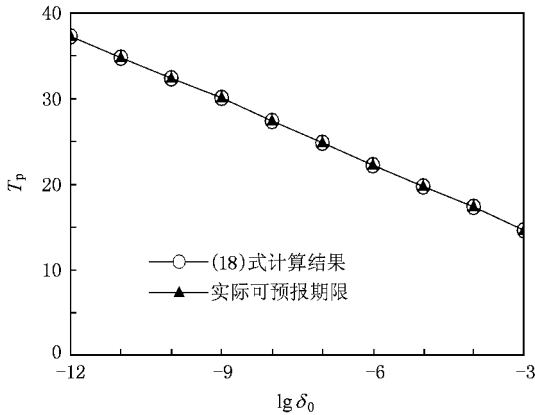


图5 利用(18)式得到 Lorenz 系统的可预报期限和利用非线性误差增长理论计算得到的实际可预报期限随初始误差的变化

## 6. 结 论

以往关于可预报时间尺度与初始误差的研究都

是建立在线性误差动力学基础上,在初始误差和预报误差上限都很小的情形下才成立,具有很大的局限性. 针对线性误差动力学的局限性,本文通过引进一种非线性误差增长理论,研究了混沌系统可预报期限随初始误差的变化规律. 研究发现,在非线性的误差动力学的框架下,由于误差增长从进入非线性增长阶段到达饱和的时间是固定的,可预报期限只依赖于误差线性增长阶段时间的长短,因此可预报期限与初始误差的对数其实存在着简单的线性函数关系. 线性系数与最大 Lyapunov 指数有关,最大 Lyapunov 指数越大,则可预报性期限随着初始误差对数的增大线性减少的速率也越大. 在已知混沌系统的最大 Lyapunov 指数和某一个固定初始误差的可预报期限的条件下,利用可预报期限与初始误差的线性函数关系可以外推得到其他任意固定初始误差的可预报期限.

应当指出的是,以上的结论仅适用于初始误差不是很大的情况,如果初始误差很大,误差直接进入非线性增长阶段,可预报期限与初始误差的对数之间的线性函数关系不再成立,可预报期限与初始误差可能存在着较为复杂的函数关系. 另外,本文研究主要针对 Logistic 映射、Lorenz 系统和 Rössler 系统等这样简单的混沌系统,对于像大气等复杂系统而言,本文所得结论可能并不适用或者仅在一定的范围内适用. 这些问题还有待于进一步的研究.

- [ 1 ] Toth Z 1991 *Mon. Wea. Rev.* **119** 65
- [ 2 ] Chen W Y 1989 *Mon. Wea. Rev.* **117** 1227
- [ 3 ] Krishnamurthy V 1993 *J. Atmos. Sci.* **50** 2215
- [ 4 ] Lorenz E N 1969 *Tellus* **21** 289
- [ 5 ] He W P, Feng G L, Dong W J, Li J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 969 ( in Chinese ) [ 何文平、封国林、董文杰、李建平 2006 物理学报 **55** 969 ]
- [ 6 ] Feng G L, Dai X G, Wang A H, Chou J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 ( in Chinese ) [ 封国林、戴新刚、王爱慧、丑纪范 2001 物理学报 **50** 606 ]
- [ 7 ] Lorenz E N 1995 *Proceedings of a Seminar Held at ECMWF on Predictability ( I )* ( Reading : ECMWF ) p1
- [ 8 ] Eckmann J P, Ruelle D 1985 *Rev. Mod. Phys.* **57** 617
- [ 9 ] Duan W S, Mu M 2005 *Prog. Nat. Sci.* **15** 915
- [ 10 ] Mu M, Duan W S, Wang B 2004 *J. Geophys. Res.* **112** D10113
- [ 11 ] Li J P, Ding R Q, Chen B H 2006 *Frontier and Prospect of Atmospheric Sciences at the Beginning of the 21st Century* ( Beijing : China Meteorology Press ) p96 ( in Chinese ) [ 李建平、丁瑞强、陈宝花 2006 21 世纪初大气科学发展的回顾与展望 ( 北京 : 气象出版社 ) 第 96 页 ]
- [ 12 ] Ding R Q, Li J P 2007 *Phys. Lett. A* **364** 396
- [ 13 ] Chen B H, Li J P, Ding R Q 2006 *Sci. China D* **49** 1111
- [ 14 ] Ding R Q, Li J P 2007 *Chin. J. Atmos. Sci.* **31** 571 ( in Chinese ) [ 丁瑞强、李建平 2007 大气科学 **31** 571 ]
- [ 15 ] Kazantsev E 1999 *Appl. Math. Comp.* **104** 217
- [ 16 ] Ziemann C, Smith L A, Kurths J 2000 *Phys. Lett. A* **271** 237
- [ 17 ] Oseledec V I 1968 *Trans. Moscow Math. Soc.* **19** 197
- [ 18 ] Zou C Z, Zhou X J, Yang P C 1985 *Adv. Atmos. Sci.* **2** 215
- [ 19 ] Devaney R L 1989 *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* ( Redwood City : Addison-Wesley ) p120
- [ 20 ] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [ 21 ] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, Vastano J A 1985 *Physica D* **16** 285

# Study on the regularity of predictability limit of chaotic systems with different initial errors<sup>\*</sup>

Ding Rui-Qiang Li Jian-Ping<sup>†</sup>

( *State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China* )

( Received 17 October 2007 ; revised manuscript received 13 August 2008 )

## Abstract

The predictability limits of the Logistic map and Lorenz system as functions of initial error are calculated by employing the nonlinear error growth dynamics. It is found that there exists a linear relationship between the predictability limit and the logarithm of initial error. It is revealed by the theoretical analysis under the nonlinear error growth dynamics that the growth of average error will enter the nonlinear growth phase after the error reaches a certain critical magnitude and will finally reach saturation. For a given chaotic system, if the control parameters of the system are given, then the saturation of error growth is determined. Therefore, the predictability limit of the system only depends on the initial error. This is different from the linear error growth dynamics, under which the predictability time scale of chaotic system also depends on the upper limit of forecast error. In the linear expression between the predictability limit and the logarithm of initial error, its linear coefficient is relevant to the largest global Lyapunov exponent of chaotic system. If the largest global Lyapunov exponent and the predictability limit corresponding to a fixed initial error are known, the predictability limit corresponding to other initial errors can be extrapolated by the linear function expression between the predictability limit and initial error.

**Keywords** : nonlinear local Lyapunov exponent, predictability limit, initial error, chaos system

**PACC** : 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China ( Grant No. 2006CB403600 ) and the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 40325015, 40675046 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : ljp@lasg.iap.ac.cn