

短 论

用一维时间序列确定吸引子维数 应注意的两个问题

李建平

(兰州大学大气科学系, 甘肃省兰州市_730000)

摘 要 该文给出了严格自相似和统计自相似的区别, 并由此讨论了用一维时间序列确定吸引子维数应注意的两个问题, 即维数计算公式中的标度范围及比例系数问题和双对数图与 D- m 图的关系问题。

关键词 分维 严格自相似 统计自相似 双对数图 D- m 图

中图法分类号 P468.01

自 Mandelbrot 在 70 年代引入分形(fractal)概念^[1]以后, 自然界中一类与平移不变性的周期结构不同的具有标度不变性的自相似结构便被揭示出来。利用分形几何这一数学工具可以对混沌现象中所具有的无穷嵌套的自相似几何结构加以详尽的描述, 即用奇怪吸引子的分维来描述其结构的复杂性, 进而对其动力学机制加以探讨。

对一个实际上非常复杂的动力系统而言(设它是 n 维的), 其可观测变量往往是有限的。如何通过已知系统的某一变量或某几个变量得到时间序列(即系统动力学方程的解序列)来提取动力系统的演变特征是我们所关注的问题。Packard 等^[2]提出用时间序列重构相空间研究吸引子特性的几何; Takens^[3]给出了在一定条件下离散时间序列的嵌入定理; Grassberger 等^[4,5]将时间序列延拓, 提出用关联函数来确定吸引子维数的方法。从此, 利用一维时间序列确定吸引子维数的文章不断涌现。然而, 作者发现在众多的参考文献中有两个问题一直被忽视和认识不清, 有些甚至是错误的, 从而导致了其后的一些工作是不可靠的, 且后果严重。作者认为对这两个问题如不加以澄清, 将会造成更多的混乱, 导致更大的损失。本文针对这两个问题作一些论述。

1 严格自相似和统计自相似的区别——标度范围和比例系数

自相似通常分为两类: (1) 数学上严格的有规自相似; (2) 统计意义上的无规自

1994 年 12 月 2 日收到, 1995 年 9 月 15 日收到第二次修改稿

本文得到国家基础性研究重大关键项目“气候动力学和气候预测理论的研究”资助

作者简介: 李建平, 男, 26 岁, 于兰州大学大气科学系获硕士学位, 现在该系攻读博士学位

相似。这两类自相似既有联系又有区别。这种区别在实际中是不能忽视的。无穷层次的自相似只能在数学上严格实现,而对于实际情形自相似的层次往往是有限的、近似的(统计的),只在一定的尺度范围内存在。在这个尺度范围内分维才是有意义的。因为分形理论研究都依赖于尺度 $\delta \rightarrow 0$ 时取极限,这在实际中是不可能达到的,所以在自然界中不存在真正的分形^[6],只能作为一种近似来处理。

设 F 是一个分形体, $N_\delta(F)$ 是直径最大为 δ 可以覆盖 F 的集的最少个数,则 $N_\delta(F)$ 与尺度 δ 满足标度律

$$N_\delta(F) \propto \delta^{-D} \tag{1}$$

在 $\delta \rightarrow 0$ 的情形下有

$$D = -\lim_{\delta \rightarrow 0} (\log N_\delta(F) / \log \delta) \tag{2}$$

此即 F 的分数维。

对于严格自相似而言,任何尺度下分形 F 都有精细结构,局部放大与整体严格相似。当尺度 δ 缩小 b 倍,则相应的 $N_\delta(F)$ 增大了 b^D 倍,即

$$N_{\delta/b}(F) = b^D N_\delta(F) \tag{3}$$

因此,对于严格自相似,尺度 δ 可以无限缩小趋于 0,即 $\delta \rightarrow 0$ 时(1)式成立,其标度范围为 $(0, \delta_{max})$, $0 < \delta_{max} < \infty$ 。于是有

$$D = -\log N_\delta(F) / \log \delta \tag{4}$$

而对于统计自相似而言,局部与整体的自相似是近似的(统计的),只在一定范围内存在,尺度 δ 不能无限缩小趋于 0,就不能严格满足(3)式,因而(1)式中的比例系数不能忽略。因此,在标度范围内(即 $\delta \in [\delta_{min}, \delta_{max}]$, $0 < \delta_{min} < \delta_{max} < \infty$)有

$$N_\delta(F) = K \delta^{-D} \tag{5}$$

K 为比例常数,于是

$$D = -\log K / \log \delta - \log N_\delta(F) / \log \delta \tag{6}$$

式中 $-\log K$ 是以 $\log \delta$ 和 $\log N_\delta(F)$ 为坐标轴的双对数图上直线部分在 $\log N_\delta(F)$ 轴上的截距。可见,严格自相似和统计自相似的区别在于:严格自相似的量测尺度 δ 可以无限缩小趋于 0;而统计自相似只在标度范围 $\delta \in [\delta_{min}, \delta_{max}]$, $0 < \delta_{min} < \delta_{max} < \infty$ 内成立,而在 $\delta_{min} > \delta \rightarrow 0$ 时不成立,因此(6)式不能化为(4)式。在统计自相似中比例系数 K 不能忽略,必须保留,所以,它们的维数表达式是有差别的。在实际中忽视了其中的差别将导致严重的后果。比如,利用时间序列求取吸引子的维数,通常是利用关联函数 $C_m(r)$ 与量测半径 r (在一定范围内,即 $r \in [r_{min}, r_{max}]$, $0 < r_{min} < r_{max} < \infty$) 之间的标度关系,即

$$C_m(r) \propto r^{-D} \tag{7}$$

求得,其中 m 为嵌入维数。由于比例系数 K_m 不能忽视,故(7)式写成如下等式

$$C_m(r) = K_m r^{-D} \tag{8}$$

即

$$D = -\log K_m / \log r + \log C_m(r) / \log r \tag{9}$$

式中 $-\log K_m$ 是以 $\log r$ 和 $\log C_m(r)$ 为坐标的双对数图上直线部分在 $\log C_m(r)$ 轴的截距。然而,在一些文章^[7-11]中却忽略了比例系数 K_m ,误把 $\log C_m(r) / \log r$ 当作系统的分

维, 这是不正确的。众所周知, 双对数图上直线部分的斜率即为维数 D 的估值。令标度范围为 $r_{\min}, r_{\max}, 0 < r_{\min} < r_{\max} < \infty, r, r_1 \in [r_{\min}, r_{\max}]$, 量测半径 r 和 r_1 对应的关联函数分别为 $C_m(r)$ 和 $C_m(r_1)$, 则在 r_{\min}, r_{\max} 内直线的斜率为分维 D , 显然

$$D = [\log C_m(r) - \log C_m(r_1)] / [\log r - \log r_1] \quad (10)$$

而并非是 $\log C_m(r) / \log r$ 或 $\log C_m(r_1) / \log r_1$ 。由(10)式是推不出 $D = \log C_m(r) / \log r$ 或 $D = \log C_m(r_1) / \log r_1$ 的(仅当比例系数 $K_m = 1$ 时可以推出)。而(10)式与(9)式却是一致的, 即当 $r_1 = 1$ 时, $\log r_1 = 0$, 对应直线部分在 $\log C_m(r)$ 轴上的截距为 $\log K_m$ (如前述), 所以 $D = \log C_m(r) - \log K_m / \log r - 0 = -\log K_m / \log r + \log C_m(r) / \log r$, 即为(9)式。在以 $\log r$ (自变量) 和 $\log C_m(r)$ (因变量) 为坐标轴的双对数图上, (9)式是直线的斜截式, (10)式是直线的两点式, 二者是等价的。从下面的分析将会看到把 $\log C_m(r) / \log r$ 当作系统维数与系统真实的维数 D 有很大差别。为讨论方便, 令

$$D_1 = \log C_m(r) / \log r \quad (11)$$

由(9)式知

$$D_1 = D + \log_r K_m \quad (12)$$

& 其中标度范围为 $r \in [r_{\min}, r_{\max}], 0 < r_{\min} < r_{\max} < \infty$ 。

(1) 当 $r_{\min} < r < 1$ 时: $K_m > 1$ 时, $D_1 = D - |\log_r K_m|$ (见图 1 中曲线 1); $K_m = 1$ 时, $D_1 = D$ (见图 1 中直线 2); $0 < K_m < 1$ 时, $D_1 = D + \log_r K_m$ (见图 1 中曲线 3)。

(2) 当 $1 < r < r_{\max}$ 时: $K_m > 1$ 时, $D_1 = D + \log_r K_m$ (见图 1 曲线 4); $K_m = 1$ 时, $D_1 = D$ (见图 1 直线 2); $0 < K_m < 1$ 时, $D_1 = D - |\log_r K_m|$ (见图 1 曲线 5)。

在标度范围内 D 不随 r 的变化而变化, 而 D_1 却是 r 的函数。当比例系数 K_m 较大时, D 和 D_1 的值差别是很大的。如所知, 在标度范围内分维 D (即直线的斜率) 应是定值, 因此, 用 D_1 作为吸引子的维数显然是不合理的, 同时用 D_1 作为维数还会出现矛盾。我们知道系统的维数是不会为负值的, 然而 D_1 会出现负值。因为 $C_m(r) < 1$, 即 $\log C_m(r) < 0$, 因此存在 r_1 , 当 $r > r_1$ 时, $\log r > 0$, 从而 $\log C_m(r) / \log r$ 小于 0。有些作者为了避免这种情况, 用 $|\log C_m(r) / \log r|$ 作为分维计算公式^[7, 11-14], 这也是不正确的。另外, 还有一种错误就是一些作者在讨论 $D-m$ 图上 D 随嵌入维数 m 的变化曲线时, 固定了某个 r 值进行讨论(因 D_1 随 r 而变, 只有将 r 固定 D_1 才确定)。显然, 固定 r 与计算直线的斜率有矛盾, 这是由于误把 D_1 当作吸引子维数的结果。总之, 上面提到的一些错误都是由于忽略了严格自相似和统计自相似之间标度范围的差别和比例系数 K 造成的。

2 双对数图与 $D-m$ 图的关系

用一维时间序列求取吸引子的分维, 通常是取延滞时间 τ , 将其作 $(m-1)$ 次漂移构成 m 维相空间。对每一个 m 值, 通过 r 的选取, 计算出 $\log C_m(r)$ 和 $\log r$, 作出以 $\log C_m$

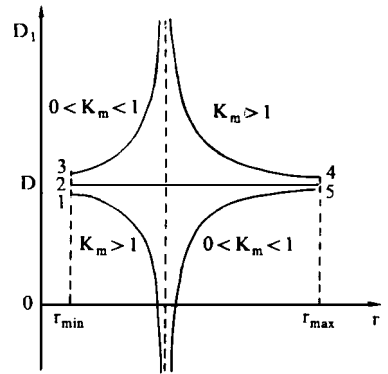
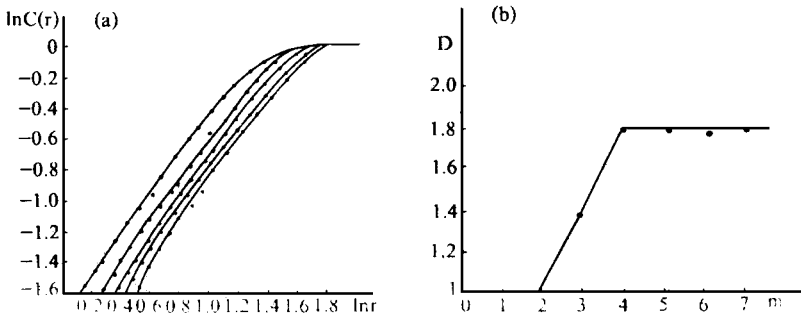


图 1 D 和 D_1 随 r 的变化
Fig. 1 Variation of D and D_1 with r

(r) 和 $\log r$ 为坐标的双对数图。利用图上线族中每一直线部分的斜率是否达到饱和来估计吸引子的维数。由前讨论可知, 直线部分的斜率不是 $\log C_m(r)/\log r$, 而是 (9) 式或 (10) 式, 文献 [13] 误把 $\log C_m(r)/\log r$ 当作直线部分的斜率, 这是不正确的。

利用双对数图, 对每一个 m 可以计算出一个斜率 D_m , 那么, 可以 D, m 为坐标轴, 画出 $D-m$ 关系图。由图中 D_m 曲线可清楚地判断出 D_m 是否能达到饱和, 饱和时的值以及嵌入维数 m 。由此可知, $D-m$ 图是由双对数图中线族的每一条线的直线部分的斜率而得到的, 它们在求分维上原本是一回事。例如, 文献 [13] 利用上海及广州的月平均温度序列求取吸引子维数时, 得到图 2 (广州的计算图略)。该文清楚地说明图 2a 中线族的每一直线的斜率与嵌入维数 m 的关系如图 2b 所示。由图 2b 可清楚地看到上海月平均温度序列确定的维数是 1.8 左右。而该文却说按图 2a 用 $D = |\ln C(r)|/|\ln r|$ 计算求得吸引子的维数 $d \approx 3.4$, 这是错误的。错误的原因是: (1) 将 $|\ln C(r)|/|\ln r|$ 当作吸引子维数的计算公式; (2) 在双对数图与 $D-m$ 图的关系上认识不清。该文用广州温度序列求得的维数也是按上述错误作法得出的, 这也是不正确的。由于求得的维数是不正确的, 所以在此基础上的工作当然不可靠。例如, 文献 [14—16] 就是在文献 [13] 求得的维数的基础上进行实验的, 所用维数是错的, 实验的可靠性就可想而知了。



2 由上海月平均温度序列得到的双对数图(a)和 $D-m$ 图(b) (引自文献 [13])
 Fig 2 Double logarithmic figure(a) and $D-m$ figure(b) computed from the time series of mean monthly temperature of Shanghai (from reference [13]).

3 结 论

(1) 自相似分为两类: 严格自相似和统计自相似。两者的区别在于标度范围和比例系数, 因此, 它们的维数表达式是有差别的。对于前者其分维公式为

$$D = - \log N_\delta / \log \delta, (\delta \rightarrow 0)$$

对于后者则为

$$D = \log K / \log \delta - \log N_\delta / \log \delta, (\delta \in [\delta^* T/m, \delta_{in}], \delta_{ax}, 0 < \delta_{in} < \delta_{ax} < \infty)$$

K 为比例常数。在实际系统中一般都是统计自相似, 求取其维数时不必计算比例系数 K , 通常的方法是算出 $\log N_\delta$ 和 $\log \delta$ 由双对数图中直线部分的斜率估算分维。(2)

双对数图与 $D-m$ 图在求分维上是一回事, 它们所得的分维值是相同的。

致谢: 本文得到史久恩教授的指导, 特此致谢。

参考文献

- 1 Mandelbrot B B. Fractals—Form, Chance and Dimension. San Francisco: Freeman, 1977
- 2 Packard N H, J P Crutchfield, J D Farmer, et al. Geometry from a time series. Phys Rev Lett, 1980, 45 (9): 712—715
- 3 Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. Rand D A and L S Young Eds. Lecture Notes in Mathematics 898. Springer-Verlag, 1981, 366—381
- 4 Grassberger P, J Procaccia. Measuring the strangeness of strange attractors. Physica, 1983, 9D: 189—208
- 5 Grassberger P, J Procaccia. Characterization of attractors. Phys Rev Letters, 1983, 50 (5): 346—349
- 6 Falconer K J. Fractal Geometry—Mathematical Foundations and Applications. Oxford: Pergamon Press, 1990
- 7 Nicolis C, G Nicolis. Is there a climatic attractor? Nature, 1984, 311: 529—512
- 8 尼科利斯, 普里戈金. 探索复杂性. 成都: 四川教育出版社, 1986
- 9 Fraedrich K. Estimating the dimensions of weather and climate attractors. J A S, 1986, 43: 419—432
- 10 Fraedrich K. Estimating weather and climate predictability on attractors. J A S, 1987, 44: 722—728
- 11 严绍瑾, 彭永清. 非平衡态理论与大气科学. 学苑出版社, 1989. 304—310
- 12 严绍瑾, 彭永清, 王建中. ENSO 事件在相空间中的轨迹特征及其混沌吸引子的维数. 南京气象学院学报, 1990, 13: 167—173
- 13 彭永清, 严绍瑾, 王建中. 一维气候时间序列的 Lyapunov 指数所显示的动态系统的演化特征. 热带气象, 1989, 5 (2): 98—104
- 14 林振山. 长期预报的相空间理论和模式. 北京: 气象出版社, 1993
- 15 林振山, 李湘如. 一种长期预报的距平符号法——相空间符号传播相似模式. 高原气象, 1991, 10 (3): 241—246
- 16 林振山. 长期预报的相空间距平符号预报法. 应用气象学报, 1991, 4: 440—446

TWO CONSIDERABLE PROBLEMS ON THE DIMENSION OF ATTRACTOR FROM ONE-DIMENSION TIME SERIES OF THE EXPERIMENTAL DATA

L i J ianping

(Department of Atmospheric Sciences, Lanzhou University, Lanzhou, Gansu 730000)

Abstract In this paper, the difference between strict self-similar and statistical self-similar has been given. Based on the difference, two considerable problems on the dimension of attractor from one-dimension time series of the experimental data, namely, the range of scale and the coefficient of proportion in the formula of fractal dimension, and the relationship between the double logarithmic figure and the D-m figure are discussed.

Key words Fractal dimension Strict self-similar Statistical self-similar Double logarithmic figure D-m figure