中国科学（D 辑）
第 27 卷 第 1 期 SCIENCE IN CHINA (Series D) 1997 年 2 月

大气吸引子的存在性*

李建平 丑纪范
（兰州大学大气科学系，兰州 730000）

摘要 研究了无穷维 Hilbert 空间中，非定常外源强迫下大尺度大气方程组解的全局渐近行为．从算子的特性出发，给出能量不等式及解的唯一性定理．在外源强迫有界的假定下，证明了全局吸收集及大气吸引子的存在性，揭示出系统具有初始场作用衰减和向外源强迫适应的特征，并对结论的物理意义及由结论所引发的关于气候数值预报的几个想法进行了阐述．

关键词 算子方程 大气吸引子 全局吸收集 非定常外源强迫 衰减 适应

大气是一个强迫耗散的非线性系统，摩擦耗散、热力强迫、非线性平流、旋转力场和重力场等基本作用构成了大气运动的本质特征[1]．这种运动服从一些物理定理，并可用数学的语言表述成偏微分方程组的形式．但这组非线性偏微分组太复杂，一般说来，无法求得其解析解．虽然可以利用计算机对其进行数值试验，但它却无法解决当时间趋于无穷时，所有可能的初值出发的终态性质．因此，如果在不求解微分方程的情况下能直接由微分方程本身来研究其解的性质，无疑对了解大气的总体的宏观特征有十分重要的意义．

在定常外源强迫下，丑纪范[1~4]首先讨论了 R^n 维空间中非线性大气系统解的全局渐近行为，证明无论初始状态如何，系统都会演变到 R^n 空间中一吸收点集中的状态．从物理上讲，这就是系统向外源的适应．之后，又把结果推广到无穷维 Hilbert 空间中[5]．对于实际大气，外源强迫是非定常的．研究非定常强迫下的大气运动的规律性，对于了解和预报大规模的天气和气候运动来说，也有着基础性的意义[6]．因此，在非定常外源强迫下，我们把上述结论推广到 R^n 中[7]．在无穷维 Hilbert 空间中是否也成立，本文就主要讨论这个问题．

1 基本方程组

本文采用球面(λ,θ,p,t)坐标下的大尺度大气运动方程组，为节省篇幅，其具体形式请参见文献[1,2~5,8]（所用符号亦同）．方程的求解区域为 $\Omega=S^2\times(p_0,P_s)$，$0<p_0<P_s<\infty$，其中 $p_0>0$ 是某个任意小的正数，P_s 为地表面气压，边界条件为：

在地表面 $p=P_s$ 上，

$$V_\lambda = V_\theta = \omega = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \alpha_s(T_s - T), \tag{2}$$

1996-04-14 收稿，1996-06-28 收修改稿
* 国家基础性研究重大关键资助项目

这里 $T_s = T_s(\lambda, \theta, t)$ 为地表面的温度, α_s 是与湍流导热率有关的参数, 它依赖于地面特征.

在大气层顶 $p = p_0$ 上,

$$\frac{\partial V_\lambda}{\partial p} = \frac{\partial V_\theta}{\partial p} = 0, \qquad \omega = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial p} = 0, \tag{3}$$

初始条件为:

$$(V_\lambda, V_\theta, T)\Big|_{t=0} = (V^{(0)}_\lambda, V^{(0)}_\theta, T^{(0)}). \tag{4}$$

2 基本空间、算子方程、算子的性质及假定

引进向量函数 $\varphi = (V_\lambda, V_\theta, \omega, \Phi, T)'$(这里"′"表示转置)和算子 B, N, L, 可将球面坐标下大尺度大气方程组写成如下的算子方程:

$$B\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (N(\varphi) + L)\varphi = \xi(t), \tag{5}$$

$$B\varphi\Big|_{t=0} = B\varphi_0. \tag{6}$$

这里

$$B = \mathrm{diag}(1, 1, 0, 0, R^2/C^2), \tag{7}$$

$$N(\varphi) = \begin{bmatrix} \Lambda & 2\Omega\cos\theta + \frac{\mathrm{ctg}\theta}{a}V_\lambda & 0 & \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial} & 0 \\ \left(-2\Omega\cos\theta + \frac{\mathrm{ctg}\theta}{a}V_\lambda\right) & \Lambda & 0 & \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{R}{p} \\ \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda} & \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta & \frac{\partial}{\partial p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R}{p} & 0 & \frac{R^2}{C^2}\Lambda \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$L = \mathrm{diag}(L_1, L_1, 0, 0, L_2 + l_2\alpha_s T_s^2/T^2), \tag{9}$$

$$\xi(t) = (0, 0, 0, 0, R^2\varepsilon(t)/C^2C_P + l_2\alpha_s T_s^2(t)/T), \tag{10}$$

其中 $L_i = -\partial_p l_i \partial_p - \mu_i \nabla^2_s$; $l_i = \upsilon_i(gp/R\bar{T})^2, i = 1, 2$. 算子 $N(\varphi)$ 概括了旋转流体运动的平流、地转偏向力、地球的球面效应、气压梯度力等的作用. 算子 L 体现了方程中的耗散项.

在向量函数 $\varphi = (V_\lambda, V_\theta, \omega, \Phi, T)'$ 的全体所构成的集合上, 定义如下内积和范数

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_\Omega \varphi'_1\varphi_2 \mathrm{d}\Omega = \int_{P_0}^{P_s}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \varphi'_1\varphi_2 a^2\sin\theta \mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta\mathrm{d}p, \tag{11}$$

$$\|\varphi\|_0 = (\varphi, \varphi)^{1/2}. \tag{12}$$

并完备化后, 即得一 Hilbert 空间 H_0.

令 $B^*, L^*, N^*(\varphi)$ 分别为 $B, L, N(\varphi)$ 的伴随算子, 则不难有

性质 1 $$B = B^*, L = L^*, N(\varphi) = -N^*(\varphi), \tag{13}$$

我们称 B, L 为自伴算子, $N(\varphi)$ 为反伴算子.

性质 2 B, L 为正定算子,

$$(\varphi, B\varphi) \geqslant 0, \tag{14}$$
$$(\varphi, L\varphi) \geqslant 0, \tag{15}$$
$$(\varphi, N(\varphi_1)\varphi) = 0, \tag{16}$$

$\forall \varphi, \varphi_1 \in H_0(\Omega)$，(14)式及(15)式中等号只在 $\|\varphi\|_0 = 0$ 时成立．

(14)式表明$(\varphi, B\varphi)$代表能量．(15)式表明算子 L 的自共轭和正定性表征着耗散作用总是使能量耗散．(16)式表明算子 $N(\varphi)$的反伴性质表征了流体运动的平流、地转偏向力、地球的球面效应、气压梯度力等的作用不改变总能量这一重要的物理本质．

在绝热无摩擦下由(14～16)式知(5)式有总能量守恒

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi, B\varphi) = 0, \tag{17}$$

即

$$\|B_1\varphi\|_0^2 = \int_\Omega \left(V_\lambda^2 + V_\theta^2 + \frac{R^2}{C^2}T^2\right)\mathrm{d}\Omega = 常数. \tag{18}$$

式中 $B_1 = \mathrm{diag}(1,1,0,0,R/C)$．

令 $H_1(\Omega)$为下列范数下的完备化空间

$$\|\varphi\|_1 = (\|V_\lambda\|^2 + \|V_\theta\|^2 + \|\omega\|^2 + \|\Phi\|^2 + \|T\|^2)^{1/2}, \tag{19}$$

$\forall \varphi = (V_\lambda, V_\theta, \omega, \Phi, T)'$，其中 $\|V_\lambda\|$，$\|V_\theta\|$ 和 $\|T\|$ 取 $H^1(\Omega)$中范数，$\|\omega\|$ 和 $\|\Phi\|$ 取 $Q(\Omega)$中范数．这里 $H^1(\Omega)$是标准的 Sobolev 空间，$Q(\Omega)$是如下范数下的完备化空间：

$$\|q\| = \left(\int_\Omega (q^2 + (\partial q/\partial p)^2)\mathrm{d}\Omega\right)^{1/2}, (q = \omega 或 \Phi) \tag{20}$$

在 $Q(\Omega)$中，可赋予如下等价范数：

$$\|q\| = \left(\int_\Omega (\partial q/\partial p)^2\mathrm{d}\Omega\right)^{1/2}, (q = \omega 或 \Phi) \tag{21}$$

引理 1　存在常数 $K_1, K_2 > 0$，使得

$$K_1(\|V_\lambda\|^2 + \|V_\theta\|^2 + \|T\|^2) \leqslant \|\varphi\|_1 \leqslant K_2(\|V_\lambda\|^2 + \|V_\theta\|^2 + \|T\|^2), \tag{22}$$

$\forall \varphi = (V_\lambda, V_\theta, \omega, \Phi, T)' \in H_1(\Omega)$．

所以，在 $H_1(\Omega)$中可用如下等价范数：

$$\|\varphi\|_1 = (\|V_\lambda\|^2 + \|V_\theta\|^2 + \|T\|^2)^{1/2}, \tag{23}$$

为了下面的讨论，需要将算子 $N(\varphi)$分解为

$$N(\varphi) = N^{(1)}(\varphi) + N^{(2)} \tag{24}$$

$$N^{(1)}(\varphi) = \begin{bmatrix} \Lambda & \frac{\mathrm{ctg}\theta}{a}V_\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mathrm{ctg}\theta}{a}V_\lambda & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R^2}{C^2}\Lambda \end{bmatrix},$$

$$N^{(2)}=\begin{bmatrix} 0 & 2\Omega\cos\theta & 0 & \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda} & 0 \\ -2\Omega\cos\theta & 0 & 0 & \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{R}{p} \\ \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda} & \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta & \frac{\partial}{\partial p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R}{p} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

算子 $N^{(1)}(\varphi)$, $N^{(2)}$均为反伴算子.

引理 2

$$N(\varphi_1+\varphi_2)=N^{(1)}(\varphi_1+\varphi_2)+N^{(2)}, \tag{25}$$

$$N^{(1)}(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)=\alpha N^{(1)}(\varphi_1)+\beta N^{(1)}(\varphi_1),\ \forall\,\varphi,\varphi_1\in H_0(\Omega). \tag{26}$$

引理 3 存在常数 $C_1>0$, 使得

$$C_1\|\varphi\|_1^2\leqslant(\varphi,L\varphi),\ \forall\,\varphi\in H_1(\Omega). \tag{27}$$

引理 4 存在常数 C, 使得

$$|(N^{(1)}(\varphi)\varphi_1,\varphi)|=|(N^{(1)}(\varphi)\varphi_1,\varphi)|\leqslant C\begin{cases}\|\varphi\|_1\ \|B_1\varphi\|_0\|\varphi_1\|_3,\\ \|\varphi\|_1\|B_1\varphi\|_0\|B_1\varphi_1\|_3.\end{cases} \tag{28}$$

本文研究的是非定常外源强迫情形, 因此 $\xi=\xi(t)$是随时间变化的. 但在实际中, 外源强迫总是有界的, 故下面的讨论假定外源强迫是有界的, 即

$$0<\|\zeta(t)\|^2\leqslant M<\infty, \tag{29}$$

其中 $\|\zeta(t)\|^2=\|R^2\varepsilon(t)/C^2C_P\|^2+l_2\alpha_s\|T_s(t)\|^2$, $\varepsilon(t)$, $T_s(t)$可以是拟周期, 渐近拟周期或可由 Fourier 级数展开的函数.

3 能量不等式和解的唯一性

定理 1 方程(5)、(6)的解 φ 满足

$$\|B_1\varphi\|_0^2+2C_1\int_0^t\|\varphi(t)\|_1^2\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\|B_1\varphi_0\|_0^2+2\int_0^t(\xi(t),\varphi(t))\mathrm{d}t,\qquad t\in[0,T],\text{a.e.} \tag{30}$$

C_1 为(27)式所给出.

进一步, 如果 $\xi(t)\in H_1^*(\Omega)$, $\dot{H}_1^*(\Omega)$为 $H_1(\Omega)$的对偶空间, 则

$$(\xi,\varphi)\leqslant\frac{1}{C_2}\|\zeta\|_{H_1^*}^2+\frac{C_1}{2}\|\varphi\|_1^2. \tag{31}$$

所以,

$$\|B_1\varphi\|_0^2+C_1\int_0^t\|\varphi(t)\|_1^2\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\| B_1\varphi_0 \|_0^2 + \frac{1}{C_2}\int_0^t \| \zeta(t) \|_{H_1^*}^2 \mathrm{d}t, \qquad t \in [0, T], \text{a.e.} \tag{32}$$

另一方面,利用 $\| B_1\varphi \|_0^2 \leqslant C_1^* \| \varphi \|_1^2$,

$$\left| (\xi(t), \varphi(t)) \right| \leqslant \frac{1}{C_2} \| \zeta(t) \|^2 + \frac{C_1}{2} \| \varphi(t) \|_0^2,$$

于是,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| B_1\varphi \|_0^2 + \widetilde{C}_1 \| B_1\varphi(t) \|_0^2 \leqslant \frac{1}{C_2} \| \zeta(t) \|^2. \tag{33}$$

由经典的 Gronwall 不等式有,

定理 2　方程(5)、(6)的解 φ 满足

$$\| B_1\varphi \|_0^2 \leqslant \left\{ \| B_1\varphi_0 \|_0^2 + \frac{1}{C_2}\int_0^t \mathrm{e}^{\widetilde{C}_1 t} \| \zeta(t) \|^2 \mathrm{d}t \right\} \mathrm{e}^{-\widetilde{C}_1 t}, \tag{34}$$

$t \in [0, T]$, a.e., $C_2, \widetilde{C}_1 > 0$.

(34)式具有明显的物理意义,其中右端第 1 项反映初值的影响,第 2 项反映外源的影响.当时间 $t \to \infty$ 时,有

$$\| B_1\varphi_0 \|_0^2 \mathrm{e}^{-\widetilde{C}_1 t} \longrightarrow 0, \tag{35}$$

$$\lim_{t\to\infty} \| B_1\varphi \|_0^2 \leqslant \lim_{t\to\infty} \left\{ \| B_1\varphi_0 \|_0^2 + \frac{1}{C_2}\int_0^t \mathrm{e}^{\widetilde{C}_1 t} \| \zeta(t) \|^2 \mathrm{d}t \right\} \mathrm{e}^{-\widetilde{C}_1 t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{C_2}\int_0^t \mathrm{e}^{\widetilde{C}_1 t} \| \zeta(t) \|^2 \mathrm{d}t \Big| \mathrm{e}^{-\widetilde{C}_1 t}. \tag{36}$$

这就从一般意义上说明方程(5)所描写的体系具有初始场作用衰减的特征[8],系统的长期变化取决于外源的变化情况.

考虑到(29)式的假定,则有

$$\begin{aligned} \| B_1\varphi \|_0^2 &\leqslant \left\{ \| B_1\varphi_0 \|_0^2 + \frac{M}{C_2}\int_0^t \mathrm{e}^{\widetilde{C}_1 t} \mathrm{d}t \right\} \mathrm{e}^{-\widetilde{C}_1 t} = \\ &\| B_1\varphi_0 \|_0^2 e^{-\widetilde{C}_1 t} + \frac{M}{C_2\widetilde{C}_1}(1 - \mathrm{e}^{-\widetilde{C}_1 t}), \qquad t \in [0, T], \text{a.e.} \end{aligned} \tag{37}$$

定理 3　初边值问题(5)、(6),(1~3)式的光滑解是唯一的.

证　令 $\varphi_1 = (V_{1\lambda}, V_{1\theta}, \omega_1, \Phi_1, T_1)'$, $\varphi_2 = (V_{2\lambda}, V_{2\theta}, \omega_2, \Phi_2, T_2)'$ 是满足初边值问题(5)、(6)、(1~3)式的解,再令

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi = (V_\lambda, V_\theta, \omega, \Phi, T)',$$

则由前面的讨论有

$$\frac{\partial}{\partial t}B\varphi + N^{(1)}(\varphi_1)\varphi_1 - N^{(1)}(\varphi_2)\varphi_2 + N^{(2)}\varphi + L^*\varphi = 0, \tag{38}$$

$$\varphi(\lambda, \theta, p; 0) = 0, \tag{39}$$

在 $p = P_s$ 上,　　$(V_\lambda, V_\theta, \omega) = 0, \partial T/\partial p = -\alpha_s T,$　　(40)

在 $p = p_0$ 上,　　$(\partial V_\lambda/\partial p, \partial V_\theta/\partial p, \omega, \partial T/\partial p) = 0,$　　(41)

其中 $L^* = \mathrm{diag}(L_1, L_1, 0, 0, L_2)$.

由引理 2 知

$$\frac{\partial}{\partial t}B\varphi + N^{(1)}(\varphi + \varphi_2)\varphi + N^{(1)}(\varphi)\varphi_2 + N^{(2)}\varphi + L^*\varphi = 0, \tag{42}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| B_1\varphi \|_0^2 + 2(N^{(1)}(\varphi + \varphi_2)\varphi, \varphi) + 2(N^{(1)}(\varphi)\varphi_2, \varphi) + 2(N^{(2)}\varphi, \varphi) + 2(L^*\varphi, \varphi) = 0. \tag{43}$$

所以,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| B_1\varphi \|_0^2 + 2C_1\| \varphi \|_1^2 \leqslant 2\left|(N^{(1)}(\varphi)\varphi_2, \varphi)\right| \leqslant 2C\| \varphi \|_1 \| B_1\varphi \|_0 \| B_1\varphi_2 \|_3 \leqslant C_1\| B_1\varphi \|_1^2 + \frac{C^2}{C_1}\| B_1\varphi \|_0^2 \| B_1\varphi_2 \|_3^2, \tag{44}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| B_1\varphi \|_0^2 \leqslant C\| B_1\varphi_2 \|_3^2 \| B_1\varphi \|_0^2. \tag{45}$$

积分上式,并利用(39)式立即可得 $\| B_1\varphi \|_0^2 \equiv 0$,即有 $\varphi_1 \equiv \varphi_2$. 证毕.

4 大气吸引子的存在性

定理 4 在(29)式的假定下,令

$$B_K = \{\varphi = (V_\lambda, V_\theta, \omega, \Phi, T)' \in H_0(\Omega) \mid \| B_1\varphi \|_0^2 \leqslant K\}, \tag{46}$$

$$\tau = \frac{1}{\tilde{C}_1}\ln\frac{\| B_1\varphi_0 \|_0^2 - M_1}{K - M_1}, \tag{47}$$

$$K > M_1 \tag{48}$$

$$M_1 = M/C_2\tilde{C}_1. \tag{49}$$

C_2 为(31)式所给出,$\tilde{C}$ 为(33)式给出,方程(5)、(6)的解满足:

(1)若 $B_1\varphi_0 \in B_K$,则对 $\forall\, t \geqslant 0$, $B_1\varphi(t) \in B_K$;

(2)若 $B_1\varphi_0 \notin B_K$,则对 $\forall\, t \geqslant \tau$, $B_1\varphi(t) \in B_K$.

证 在(29)式的假定下,方程(5)、(6)的解满足(37)式,即

$$\| B_1\varphi \|_0^2 \leqslant \| B_1\varphi_0 \|_0^2 \mathrm{e}^{-\tilde{C}_1 t} + M_1(1 - \mathrm{e}^{-\tilde{C}_1 t}) \tag{50}$$

因为

$$0 < \mathrm{e}^{-\tilde{C}_1 t} \leqslant 1, \qquad \forall\, t \geqslant 0,$$

所以

$$K e^{-\tilde{C}_1 t} + M_1(1 - \mathrm{e}^{-\tilde{C}_1 t}) \leqslant K. \tag{51}$$

若 $B_1\varphi_0 \in B_K$,则

$$\| B_1\varphi_0 \|_0^2 \leqslant K,$$

由(50)及(51)式可得

$$\| B_1\varphi \|_0^2 \leqslant K\mathrm{e}^{-\tilde{C}_1 t} + M_1(1 - \mathrm{e}^{-\tilde{C}_1 t}) \leqslant K.$$

因而 $\forall\, t \geqslant 0$ 有 $B_1\varphi(t) \notin B_K$.

若 $B_1\varphi_0 \notin B_K$,则

$$\| B_1\varphi_0 \|_0^2 > K.$$

当 $\forall\, t \geqslant \tau$ 时,由(50)式可得

$$\| B_1\varphi \|_0^2 \leqslant \frac{K - M_1}{\| B_1\varphi_0 \|_0^2 - M_1} \| B_1\varphi_0 \|_0^2 + M_1\left(1 - \frac{K - M_1}{\| B_1\varphi_0 \|_0^2 - M_1}\right) = K,$$

故有 $B_1\varphi(t) \in B_K$. 证毕.

定理 4 表明,H_0 中存在一个有界球体 B_K,以 B_K 外任一点为初值的方程(5)的解 $\varphi(t)$ 必将在时间 t 大于某个临界时间 τ 时进入并永远留在 B_K 内,而以 B_K 内的任一点为初值的解不会跑到 B_K 外. 也即是说,当 $t \geqslant \tau$ 时,对所有可能的初值 $B_1\varphi_0$,都成立 $B_1\varphi(t) \in B_K$. 因此,我们称 B_K 为全局吸收集. B_K 外的点对于研究时间趋于无穷的渐近状态无关,它表示的状态只有暂时意义,而系统的渐近状态(即长期行为)将只取决于有界球体 B_K. K 的下界取决于外源强迫的最大值 M 的大小. 进一步要问 B_K 内的点集最终是什么样子? 是否会趋于一不变点集呢? 下面就讨论这个问题.

由定理 3 知,$B_1\varphi(t)$ 由初值 $B_1\varphi_0$ 所唯一确定. 于是(5)、(6)定义了一个映射(或称算子)$S(t): H_0 \to H_0$,使得 $S(t)B_1\varphi_0 = B_1\varphi(t)$. 定义

$$S(t)R = \{S(t)B_1\varphi_0 \mid \forall\, B_1\varphi_0 \in R \subset H_0\}, \tag{52}$$

于是,定理 4 可表述如下:

定理 4′　B_K 是一吸收集,即,对 $\forall\, R \subset H_0$, R 为有界集,存在 $\tau(R)$,使得

$$S(t)R \subset B_K, \qquad \forall\, t \geqslant \tau(R). \tag{53}$$

引理 5[9]　设 H 是一个度量空间,$S(t)$ 是 $H \to H$ 的连续半群,并且 $S(t)$ 对大的 t 是一致紧. 另外设 U 为一开集,$\mathscr{A}$ 为 U 的有界集,使得 $\mathscr{A}$ 是 U 中的吸收集,那么

$$A = \bigcap_{S \geqslant 0} \bigcup_{t \geqslant S} S(t)\mathscr{A} \tag{54}$$

是一个紧吸引子,它吸引 U 中的有界集,而且是 U 中最大吸引子.

定义

$$A = \bigcap_{S \geqslant 0} \overline{\bigcup_{t \geqslant S} S(t)B_K}, \tag{55}$$

则我们有

定理 5　A 满足:

(1) A 是 H_0 中的有界集;

(2) A 是 $S(t)$ 的泛函不变集,即

$$S(t)A = A, \qquad \forall\, t \geqslant 0; \tag{56}$$

(3) 存在 A 的开邻域 U,使得 $\forall\, B_1\varphi_0 \in U$,当 $t \to \infty$ 时,$S(t)B_1\varphi_0 \to 0$,即

$$\mathrm{dist}(S(t)B_1\varphi_0, A) \to 0, \text{当 } t \to \infty \text{ 时}, \tag{57}$$

这里 $\mathrm{dist}(x, A) = \inf\limits_{y \in A} d(x, y)$, $d(x, y)$ 是 H_0 中 x, y 的距离;

(4) A 一致吸引集合 B_K,即

$$d(S(t)B_K, B_K) \to 0, \quad \text{当 } t \to \infty \text{ 时}, \tag{58}$$

其中 $\mathrm{d}(A_0, A_1) = \sup\limits_{x \in A_0} \inf\limits_{y \in A_1} \mathrm{d}(x, y)$;

(5) A 是 $S(t)$ 的全局吸引子.

根据以上结论可知,存在全局吸引子 A,随着时间 t 的增长,(5)、(6)式所描述的大气系统将愈来愈靠近 A. 全局吸引子 A 反映了系统的终态,我们称它为大气吸引子. 又由于(36)式及定理4所阐明的初始场作用的衰减和系统长期变化取决于外源变化的结论,所以长期天气和气候系统作为开放的物理系统具有向外源非线性适应的性质.

5 小结与讨论

本文研究了非定常外源强迫下,无穷维 Hilbert 空间中大尺度大气运动的全局渐近行为. 在外源强迫的变化满足(29)式的假定下,证明了全局吸收集 B_K 及大气吸引子的存在性,即算子方程(5)、(6)所描述的大气系统在时间 t 大于某一确定的时间 τ 时,将进入到全局吸收集 B_K 内,并且随着时间的增长,系统将趋于一全局吸引子 A. 这也就是说大气的长期演变或说气候是处于吸引子状态. 另外,系统具有初始场作用衰减的特性. 根据上述结论,我们认为下面几个方面是值得注意的.

(1)因为吸引子具有有限的 Hausdorff 维数,所以大气方程组可以被一个有限维的常微分方程组来精确描述. 这样,问题变得简单化了. 不过估计系统的维数是很关键和重要的. 由于利用实际资料确定吸引子的维数方法中存在严重的问题[10],所以就需要从理论上对吸引子维数做出严格的理论估计.

(2)在 R^n 空间中,我们可以证明上述大气吸引子的相体积为零. 这表明,根据观测资料所确定的初值,由于观测误差和缺测所引起的内插值的误差,就使得这些初值不大可能处于吸引子状态,因而是和实际大气情况不一致,是和模式方程不协调. 这就是数值预报中对初值进行各种处理以达到与模式相协调的实质.

(3)在设计气候预报的数值模式时,应利用大气初始场作用衰减的特性,使问题得到简化. 同时,要充分考虑和认识外源强迫的变化情况,这对气候预报无疑是至关重要的.

(4)在设计气候模式的数值算法或简化大气方程组时,应注意大气方程保持算子的性质不变,这也就从根本上保证了系统的物理本质.

参 考 文 献

1 丑纪范. 大气动力学的新进展. 兰州:兰州大学出版社,1990. 37~92

2 Chou Jifan. Some Gerneral Properties of the Atomospheric Model: in H Space, R^n Space, Point Mapping, Cell Mapping. Proceedings of International Summer Colloquium on Nonlinear Dynamics of the Atmosphere. Beijing: Science Press, 1986. 187~189

3 丑纪范. 长期数值天气预报. 北京:气象出版社,1986. 51~95

4 郭秉荣,丑纪范,杜行远. 大气科学中数学方法的应用. 北京:气象出版社,1986. 239~276

5 汪守宏,黄建平,丑纪范. 大尺度大气运动方程组的一些性质——定常外源强迫下的非线性适应. 中国科学,B辑, 1989, (3):328~336

6 曾庆存. 数值天气预报的数学物理基础. 北京:科学出版社,1979. 1~160

7 李建平,丑纪范. 非定常外源强迫下大尺度大气方程组解的性质. 科学通报,1995, 40(13):1 207~1 209

8 丑纪范. 初始场作用的衰减与算子的特性. 气象学报,1983, 41(4):385~392

9 李开泰,马逸尘. 数理方程 HILBERT 空间方法(下). 西安:西安交通大学出版社, 1992, 267~400

10 李建平,丑纪范. 利用一维时间序列确定吸引子维数中存在的若干问题. 气象学报,1996,54(3):312~323