应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
2006,19(1):159～168

基于二次插值的非饱和土壤水流问题的特征差分方法及数值模拟[*]

宋丽叶
(中国科学院大气物理研究所，北京 100029)

摘要：本文针对一类非饱和土壤水流问题，提出了基于二次插值的特征-差分格式，得到了严谨的 L^2 模误差估计. 并作了数值试验，指明方法的有效性.

关键词：非饱和土壤水流；特征差分法；二次插值；误差估计；数值模拟
中图分类号：O241.82；O241.3　　**AMS(2000)主题分类**：65M06；65M25
文献标识码：A　　**文章编号**：1001-9847(2006)01-0159-10

1. 引言

均质土壤中的地下水流动可归结为非饱和土壤水的流动. 由于非饱和流动的数学模型归结为非线性的偏微分方程，除了一些很特殊的情况外，很难得到解析解. 罗振东[2]采用混合有限元法建立的非饱和土壤水流的守恒形式，可以同时求出地下水及其通量的分布，用以统一计算剖面入渗、蒸发、蒸腾和再分配以及这些现象交替出现时的水流运动过程. 由 Douglas，Russell[1,3]等提出的特征差分方法，可以大幅度加大时间步长，提高计算精度. 利用这一方法，本文针对均质土壤，地下水埋藏很深的第二类非线性边值条件下的非饱和土壤水流问题建立了数值模型，得到了基于二次插值的 L^2 模误差估计.

设 $G=(0,L)$，$H^1(G)$ 表示在 G 内直到一阶导数平方可积的 Sobolev 空间. 令 $H_E^1(G)=\{v\in H^1(G);v(L)=0\}$，$(\cdot,\cdot)$表示 G 上的 L^2 内积. 定义

$$W^{k,\infty}(0,T;W^{m,p}(G))=\left\{v\left|\frac{\partial^s v}{\partial t^s}:[0,T]\to W^{m,p}(G),\ \|v\|_{W^{s,\infty}(0,T;W^{m,p}(G))}<+\infty,s=0,1,\cdots,k\right.\right\}.$$

其中 $\|v\|_{W^{s,\infty}(0,T;W^{m,p}(G))}=\max_{0\leqslant i\leqslant s}\operatorname{ess}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left\|\frac{\partial^i v}{\partial t^i}\right\|_{m,p}$. 简记 $X(0,T;Z(G))\equiv X(Z)$. 用 ε 表示小的正常数，$\widetilde{M}=\widetilde{M}(s_1,s_2,\cdots,s_r)$ 表示与量 $s_1,s_2,\cdots,s_r$ 有关的正常数. 在不同估计式中，同一符号取不同数值.

2. 基于二次插值的特征一差分格式

我们考虑一维非饱和流问题，含水率有不同的时空分布. 设 z 轴垂直向下，坐标原点取为地面，$Q(z,t)$ 为在 t 时刻离地面距离为 z 处的土壤含水率. 假设地面有随时间变化的入渗或

* 收稿日期：2005-04-04
基金项目：国家重点基础研究专项资助项目(2005CB321703)，国家自然科学基金项目(90411007)
作者简介：宋丽叶，女，汉，山东人，博士，主要从事冻土水热耦合方面的研究.

蒸发率，入渗为正，蒸发为负，在底部含水率有随时间而变化的分布．则根据 Darcy 定律及连续性原理，非饱和土壤水流问题可归结为下面的模型方程[2]：

求使得对于任意的 $T \geqslant 0$ 满足：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial z}\left(D(Q)\dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial K(Q)}{\partial z}=S_r, & 0<z<L, t\in(0,T); \\ Q(z,0)=Q_0(z), & 0\leqslant z\leqslant L; \\ Q(L,t)=\beta(t), & t\in(0,T); \\ K(Q)-D(Q)\dfrac{\partial Q}{\partial z}=q(t), & z=0, t\in(0,T). \end{cases} \tag{2.1}$$

其中各参量的物理意义见[2]．为了将边界条件齐次化，令

$$\bar{Q}(z,t)=Q(z,t)-\beta(t). \tag{2.2}$$

由于 $\beta(t)$ 相对于 t 的变化很小，假定 $\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\approx 0$. 记 $g(Q)=\dfrac{\partial K(Q)}{\partial Q}$，则(2.1)中第一式等价于

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\left(D(\bar{Q}+\beta)\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z}\right)+g(\bar{Q}+\beta)\frac{\partial \bar{Q}}{\partial z}=S_r, 0<z<L, t\in(0,T).$$

令 $\psi(z,\bar{Q})=\sqrt{1+g(\bar{Q}+\beta)^2}$，设 $\tau(z,\bar{Q})$ 是相应于算子 $\dfrac{\partial \bar{Q}}{\partial t}+g(\bar{Q}+\beta)\dfrac{\partial \bar{Q}}{\partial z}$ 的特征方向的单位矢量，则有

$$\frac{\partial}{\partial \tau}=\frac{1}{\psi(z,\bar{Q})}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{g(\bar{Q}+\beta)}{\psi(z,\bar{Q})}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.3}$$

从而问题(2.1)可表示为如下的特征形式：

$$\begin{cases} \psi(z,\bar{Q})\dfrac{\partial \bar{Q}}{\partial \tau}-\dfrac{\partial}{\partial z}\left(D(\bar{Q}+\beta)\dfrac{\partial \bar{Q}}{\partial z}\right)=S_r, & 0<z<L, t\in(0,T); \\ \bar{Q}(z,0)=Q_0(z)-\beta(0), & 0\leqslant z\leqslant L; \\ \bar{Q}(L,t)=0, & t\in(0,T); \\ K(\bar{Q}+\beta)-D(\bar{Q}+\beta)\dfrac{\partial \bar{Q}}{\partial z}=q(t), & z=0, t\in(0,T). \end{cases} \tag{2.4}$$

引理 若 S_r 和 $Q_0\in L^2(G)$，$q(t)\in L^2[0,T]$，$\beta(t)\in C^0[0,T]$，则问题(2.4)存在唯一的解 $\bar{Q}\in H_E^1(G)$，并且存在常数 K，使得 $\|\bar{Q}\|_{W^{1,\infty}(L^\infty)}\leqslant K$，$\|\bar{Q}(z,0)\|_{L^\infty}\leqslant K$.

从而，对任意的 $(z,\bar{Q})\in\bar{G}\times[-2K,2K]$，显然 $K(Q)$，$\dfrac{\partial K(Q)}{\partial Q}$，$D(Q)$ 和 $\dfrac{\partial D(Q)}{\partial Q}$ 是有界的，即存在常数 K_1,K_2 使得

$$K_1\leqslant K(Q),\frac{\partial K(Q)}{\partial Q},D(Q),\frac{\partial D(Q)}{\partial Q}\leqslant K_2. \tag{2.5}$$

并且由引理及(2.5)知，存在 $K^*>0$，使得

$$|g(z,Q)|+\left|\frac{\partial}{\partial z}g(z,Q)\right|\leqslant K^*. \tag{2.6}$$

设 h 为空间步长，$h=L/J$，$z_i=ih$，$e_i=[z_{i-1},z_i]$，$i=1,\cdots,J$；$\Delta t=T/N$ 为时间步长，$t^n=n\Delta t$，$n=0,1,\cdots,N$. 记 $\bar{G}\times[0,T]$ 的网格区域为 $\bar{G}_h\times T_\Delta$. 对定义于 $\bar{G}_h$ 上的任意网格函数 Y,Z，定义离散的 L^2 内积和范数[4]．设 $(z_i,t^n)\in G_h\times T_\Delta$. 在 (z_i,t^n) 处对 $\psi(z,\bar{Q})\dfrac{\partial \bar{Q}}{\partial \tau}$ 采用差商逼近

$$\psi(z_i,\bar{Q}_i^n)\left(\frac{\partial\bar{Q}}{\partial\tau}\right)_i^n \approx \frac{\bar{Q}_i^n-\tilde{\bar{Q}}_i^{n-1}}{\Delta t}, \tag{2.7}$$

其中 $\bar{Q}_i^n=\bar{Q}(z_i,t^n)$,$\tilde{z}_i^n=z_i-g(\bar{Q}_i^n+\beta^n)\Delta t$.

$$\tilde{\bar{Q}}_i^{n-1}=\begin{cases}\bar{Q}(\tilde{z}_i^n,t^{n-1}), & \text{if } \tilde{z}_i^n\in\bar{G},\\ \left(1-\dfrac{\tilde{k}_i^n}{\Delta t}\right)\bar{Q}_{i-1}^n+\dfrac{\tilde{k}_i^n}{\Delta t}\bar{Q}_{i-1}^{n-1}, & \text{if } \tilde{z}_i^n\bar{\in}\bar{G}.\end{cases} \tag{2.8}$$

且当 $\tilde{z}_i^n\bar{\in}\bar{G}$ 时,存在 $\tilde{k}_i^n$ 满足 $0<\tilde{k}_i^n<\Delta t$,使得 $z_i-g(\bar{Q}_i^n+\beta^n)\tilde{k}_i^n=0$ 成立.记

$$\delta_z v_i^n=\frac{v_{i+1}^n-v_i^n}{h},\delta_{\bar{z}}v_i^n=\frac{v_i^n-v_{i-1}^n}{h}, \tag{2.9}$$

$$\delta_{\bar{z}}(D\delta_z\bar{Q})_i^n=h^{-2}[D_{i+\frac{1}{2}}^n(\bar{Q}_{i+1}^n-\bar{Q}_i^n)-D_{i-\frac{1}{2}}^n(\bar{Q}_i^n-\bar{Q}_{i-1}^n)], \tag{2.10}$$

其中

$$D_{i+\frac{1}{2}}^n=\frac{1}{2}\{D(\bar{Q}_i^n+\beta^n)+D(\bar{Q}_{i+1}^n+\beta^n)\}. \tag{2.11}$$

设 $\{w_i\}$ 是问题(2.4)的数值解,$w^{n-1}(z)$ 是由 $\{w_i^{n-1}\}_{i=0}^J$ 在 $\bar{G}$ 上对 z 进行二次插值得到的函数.令

$$\check{z}_i^n=z_i-g(w_i^{n-1}+\beta^{n-1})\Delta t. \tag{2.12}$$

则可能出现 $\check{z}_i^n\bar{\in}\bar{G}$ 的情况,此时存在 $0<k_i^n<\Delta t$,成立 $z_i-g(w_i^{n-1}+\beta^{n-1})k_i^n=0$. 定义[1]

$$\check{w}_i^{n-1}=\begin{cases}w^{n-1}(\check{z}_i^n), & \text{if } \check{z}_i^n\in\bar{G},\\ \left(1-\dfrac{k_i^n}{\Delta t}\right)w_{i-1}^n+\dfrac{k_i^n}{\Delta t}w_{i-1}^{n-1}, & \text{if } \check{z}_i^n\bar{\in}\bar{G}.\end{cases} \tag{2.13}$$

不失一般性,不妨考虑仅 $\check{z}_i^n\bar{\in}\bar{G}$ 的情况.从而问题(2.4)的特征差分格式可表述为

$$\begin{cases}\dfrac{w_i^n-\check{w}_i^{n-1}}{\Delta t}-\delta_{\bar{z}}(A\delta_z w)_i^n=S_{r_i}, & i=1,\cdots,J-1;n=1,\cdots,N;\\ w_i^0=(Q_0)_i-\beta(0), & i=0,1,\cdots,J;\\ w_J^n=0, & n=1,\cdots,N-1;\\ K(w_0^{n-1}+\beta^{n-1})-D(w_0^{n-1}+\beta^{n-1})\dfrac{w_1^n-w_0^n}{h}=q(t^n), & n=1,\cdots,N.\end{cases} \tag{2.14}$$

类似于(2.11)式,定义 $A_{i+\frac{1}{2}}^n=\frac{1}{2}\{D(w_i^{n-1}+\beta^{n-1})+D(w_{i+1}^{n-1}+\beta^{n-1})\}$.

3. 误差估计

设 $\bar{Q}$ 是问题(2.4)的解,则

$$\begin{cases}\dfrac{\bar{Q}_i^n-\tilde{\bar{Q}}_i^{n-1}}{\Delta t}-\delta_{\bar{z}}(D\delta_z\bar{Q})_i^n=S_{r_i}+\varepsilon_i^n, & i=1,\cdots,J-1;n=1,\cdots,N;\\ \bar{Q}_i^0=(Q_0)_i-\beta(0), & i=0,1,\cdots,J;\\ \bar{Q}_J^n=0, & n=1,\cdots,N-1;\\ K(\bar{Q}_0^n+\beta^n)-D(\bar{Q}_0^n+\beta^n)\dfrac{\bar{Q}_1^n-\bar{Q}_0^n}{h}=q(t^n)+e_0^n, & n=1,\cdots,N.\end{cases} \tag{3.1}$$

其中 ε_i^n,e_0^n 是局部截断误差.

令 $\xi=\bar{Q}-w$,由(3.1)-(2.14)得误差方程:

$$\frac{\xi_i^n-\hat{\xi}_i^{n-1}}{\Delta t}-\delta_{\bar{z}}(A\delta_z\xi)_i^n=\varepsilon_i^n+\delta_{\bar{z}}((D-A)\delta_z\bar{Q})_i^n+\frac{\tilde{\bar{Q}}_i^{n-1}-\bar{Q}^{n-1}(\check{z}_i^n)}{\Delta t},i=2,\cdots,J-1;n=1,\cdots,N;$$

$$\frac{\xi_1^n-\xi_1^{n-1}}{\Delta t}-\delta_z(A\delta_z\xi)_1^n=\varepsilon_1^n+\delta_z((D-A)\delta_z\bar{Q})_1^n+\frac{\tilde{\bar{Q}}_1^{n-1}-w_1^{n-1}-\xi_1^{n-1}}{\Delta t},n=1,\cdots,N;$$

$$\xi_i^0=0,i=0,1,\cdots,J;\quad \xi_J^n=0,n=1,\cdots,N-1;\tag{3.2}$$

$$-(D-A)\delta_z\bar{Q}_0^n-A\delta_z\xi_0^n=e_0^n-[K(\bar{Q}_0^n+\beta^n)-K(w_0^{n-1}+\beta^{n-1})],n=1,\cdots,N.$$

其中 $\hat{\xi}_i^{n-1}$ 按(2.13)式定义，$\xi^{n-1}(z)$ 是由 $\{\xi_i^{n-1}\}_{i=0}^J$ 在 $\bar{G}$ 上对 z 进行二次插值得到的.

用 $\xi_i^n h$ 乘(3.2)两端并对 i 求和得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=2}^{J-1}\frac{\xi_i^n-\hat{\xi}_i^{n-1}}{\Delta t}\xi_i^n h-\sum_{i=1}^{J-1}\delta_z(A\delta_z\xi)_i^n\xi_i^n h+\frac{\xi_1^n-\xi_1^{n-1}}{\Delta t}\xi_1^n h\\&=\sum_{i=2}^{J-1}\frac{\tilde{\bar{Q}}_i^{n-1}-\bar{Q}^{n-1}(\hat{z}_i^n)}{\Delta t}\xi_i^n h+\sum_{i=1}^{J-1}\delta_z((D-A)\delta_z\bar{Q})_i^n\xi_i^n h\\&\quad+\sum_{i=1}^{J-1}\varepsilon_i^n\xi_i^n h+\frac{\tilde{\bar{Q}}_1^{n-1}-w_1^{n-1}-\xi_1^{n-1}}{\Delta t}\xi_1^n h.\end{aligned}\tag{3.3}$$

为了导出 ξ^n 的收敛阶估计，做归纳性假设(H1)：当 $m\leqslant n-1$ 时，$\max\limits_{0\leqslant i\leqslant J}|w_i^m|\leqslant 2K_1$. 当 $m=0$ 时，由(2.14)及引理知，假设(H1)自然成立. 后面将证明，对 $m=n$ 时假设(H1)成立. 先估计(3.3)右端各项：

$$\begin{aligned}R_1&=\sum_{i=2}^{J-1}\frac{\tilde{\bar{Q}}_i^{n-1}-\bar{Q}^{n-1}(\hat{z}_i^n)}{\Delta t}\xi_i^n h\\&\leqslant\varepsilon\sum_{i=2}^{J-1}(\xi_i^n)^2h+K\sum_{i=2}^{J-1}\left(\frac{\tilde{\bar{Q}}_i^{n-1}-\bar{Q}^{n-1}(\hat{z}_i^n)}{\Delta t}\right)^2h\\&\leqslant\varepsilon\sum_{i=2}^{J-1}(\xi_i^n)^2h+\widetilde{M}(\|\bar{Q}^{n-1}\|_{1,\infty},\|\bar{Q}\|_{W^{1,\infty}(L^\infty)})\sum_{i=2}^{J-1}(\Delta t+|\xi_i^{n-1}|)^2h,\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}R_2&=\sum_{i=1}^{J-1}\delta_z((D-A)\delta_z\bar{Q})_i^n\xi_i^n h\\&=-[(D-A)\delta_z\bar{Q}^n,\delta_z\xi^n)-((D-A)\delta_z\bar{Q})_0^n\xi_0^n\\&\leqslant\varepsilon|[\delta_z\xi^n||^2+|[(D-A)\delta_z\bar{Q}^n]|^2-((D-A)\delta_z\bar{Q})_0^n\xi_0^n\\&\leqslant\varepsilon|[\delta_z\xi^n||^2+\|\bar{Q}^n\|_{1,\infty}^2\sum_{i=0}^{J-1}[(D-A)_{i+\frac12}^n]^2h-((D-A)\delta_z\bar{Q})_0^n\xi_0^n.\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}(D-A)_{i+\frac12}^n\leqslant&K_2M(|\bar{Q}_i^n-\bar{Q}_i^{n-1}|+|\bar{Q}_i^{n-1}-w_i^{n-1}|+|\bar{Q}_{i+1}^n-\bar{Q}_{i+1}^{n-1}|\\&+|\bar{Q}_{i+1}^{n-1}-w_{i+1}^{n-1}|+|\beta^n-\beta^{n-1}|)\\\leqslant&K_2\widetilde{M}(\|\bar{Q}\|_{W^{1,\infty}(L^\infty)})(\Delta t+|\xi_i^{n-1}|+|\xi_{i+1}^{n-1}|).\end{aligned}$$

从而

$$R_2\leqslant\varepsilon|[\delta_z\xi^n||^2+\widetilde{M}(\Delta t^2+|[\xi^{n-1}]|^2)-((D-A)\delta_z\bar{Q})_0^n\xi_0^n.\tag{3.5}$$

由[1]知

$$\begin{aligned}R_3&=\sum_{i=1}^{J-1}\varepsilon_i^n\xi_i^n h\leqslant\frac12\sum_{i=1}^{J-1}(\xi_i^n)^2h+\frac12\sum_{i=1}^{J-1}(\varepsilon_i^n)^2h\\&\leqslant\frac12\sum_{i=1}^{J-1}(\xi_i^n)^2h+\frac12\widetilde{M}\left(\|\bar{Q}^n\|_4^2,\left\|\frac{\partial^2\bar{Q}}{\partial\tau^2}\right\|^2_{L^2(t^{n-1},t^n;l^2)}\right)\left(\frac{h^4}{\Delta t}+\Delta t\right).\end{aligned}\tag{3.6}$$

这里,定义当 $\alpha \in L^\infty(G)$ 时, $\|\alpha\|_l^2 = \sum_{i=1}^{J-1} \max\{|\alpha(x)|^2 : x \in \bar{G}, |x - x_i| \leqslant K^* \Delta t\} h.$

对于修正点落在区域 $\bar{G}$ 内的情况,假设步长 $h, \Delta t$ 的选取满足条件(H2):

$$\max_{z \in \bar{G}, y \in [-2K, 2K]} g(z, y) \frac{\Delta t}{h} \leqslant 1.$$

$$\begin{aligned}
R_4 &= \frac{(\tilde{\bar{Q}}_1^{n-1} - w_1^{n-1}) - \xi_1^{n-1}}{\Delta t} \xi_1^n h \\
&= \frac{h}{\Delta t} \xi_1^n \{\xi_0^n - \frac{1}{\Delta t}[(\tilde{k}_1^n - k_1^n)\bar{Q}_0^n + k_1^n \xi_0^n] + \frac{1}{\Delta t}[\tilde{k}_1^n \xi_0^{n-1} + (\tilde{k}_1^n - k_1^n) w_0^{n-1}] - \xi_1^{n-1}\} \\
&= \frac{h}{\Delta t} \xi_1^n \{(1 - \frac{k_1^n}{\Delta t})\xi_0^n - \frac{1}{\Delta t}(\tilde{k}_1^n - k_1^n)(\bar{Q}_0^n - w_0^{n-1}) + \frac{\tilde{k}_1^n}{\Delta t}\xi_0^{n-1} - \xi_1^{n-1}\} \\
&\leqslant \frac{h}{\Delta t} \xi_1^n \left\{(1 - \frac{k_1^n}{\Delta t})\xi_0^n - \frac{\max g(z, y)}{h}(\tilde{k}_1^n - k_1^n)(\bar{Q}_0^n - w_0^{n-1}) + \frac{\tilde{k}_1^n}{\Delta t}\xi_0^{n-1} - \xi_1^{n-1}\right\}.
\end{aligned}$$

$$|\tilde{k}_1^n - k_1^n| = \left|\frac{h}{g(\bar{Q}_1^n + \beta^n)} - \frac{h}{g(w_1^{n-1} + \beta^{n-1})}\right| \leqslant M(|\xi_1^{n-1}| + \widetilde{M}\Delta t).$$

从而

$$|R_4| \leqslant \frac{h}{\Delta t}[|\xi_1^n|^2 + |\xi_0^n|^2 + \widetilde{M}(\Delta t^2 + |\xi_1^{n-1}|^2) + |\xi_0^{n-1}|^2]. \tag{3.7}$$

再考虑(3.3)的左端:

$$\begin{aligned}
\text{Left} \geqslant & \frac{1}{2\Delta t}\{\sum_{i=1}^{J-1}(\xi_i^n)^2 - \sum_{i=2}^{J-1}(\hat{\xi}_i^{n-1})^2 - (\xi_1^{n-1})^2\} h \\
& - \sum_{i=1}^{J-1} \delta_z (A \delta_z \xi)_i^n \xi_i^n h = I_1 + I_2.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\sum_{i=1}^{J-1} \delta_z (A \delta_z \xi)_i^n \xi_i^n h = -(\delta_z (A \delta_z \xi)^n, \xi^n) \\
&= [A \delta_z \xi^n, \delta_z \xi^n) + A \delta_z \xi_0^n \xi_0^n \\
&\geqslant K_1 | [\delta_z \xi^n ||^2 + A \delta_z \xi_0^n \xi_0^n.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

用 $L\xi_k^{n-1}(z)$ 表示由 $\{\xi_i^{n-1}\}_{i=0}^J$ 做出的按 $Q_i = [z_{i-1}, z_{i+1}]$ 的二次插值函数. 在区间 Q_i 上,

$$L\xi_k^{n-1}(\check{z}_i^n) = \frac{1}{2}(\alpha_i^{n-1})^2[\xi_{i+1}^{n-1} - 2\xi_i^{n-1} + \xi_{i-1}^{n-1}] - \frac{1}{2}\alpha_i^{n-1}[\xi_{i+1}^{n-1} - \xi_{i-1}^{n-1}] + \xi_i^{n-1}, \tag{3.10}$$

其中 $\alpha_i^{n-1} = g(z_i, w_i^{n-1})\frac{\Delta t}{h}$. 由 Peano 核定理知

$$|\bar{Q}^{n-1}(\check{z}_i^n) - L\bar{Q}_k^{n-1}(\check{z}_i^n)| \leqslant M \|\bar{Q}^{n-1}\|_{H^3(Q_i)} h^{3/2} \Delta t. \tag{3.11}$$

为了下面估计的书写方便,暂时略去上标 $n-1$. 注意到

$$\hat{\xi}_i = \xi(\check{z}_i^n) = \bar{Q}(\check{z}_i^n) - L\bar{Q}_k(\check{z}_i^n) + L\xi_k(\check{z}_i^n),$$

及(3.11)式得

$$\sum_{i=2}^{J-1}[\hat{\xi}_i^{n-1}]^2 h = \sum_{i=2}^{J-1}[L\xi_k(\check{z}_i^n)]^2 h + O(\|\xi\|^2 \Delta t + \|\bar{Q}\|_3^2 h^4 \Delta t).$$

注意到 $\alpha_i^4 \leqslant \alpha_i^2, \xi_J = 0$, 经计算得

$$\sum_{i=2}^{J-1}[L\xi_k(\check{z}_i^n)]^2 h \leqslant \sum_{i=2}^{J-1}(\xi_i)^2 h + \Sigma_1 - \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4,$$

其中

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \sum_{i=2}^{J-1}\left(\frac{\xi_{i+1}^2+\xi_{i-1}^2}{2}-\xi_i^2\right)\alpha_i^2 h\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{J}\xi_i^2\alpha_{i-1}^2 h+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{J-2}\xi_i^2\alpha_{i+1}^2 h-\sum_{i=2}^{J-1}\xi_i^2\alpha_i^2 h\\ &= \sum_{i=2}^{J-1}\left(\frac{\alpha_{i-1}^2+\alpha_{i+1}^2}{2}-\alpha_i^2\right)\xi_i^2 h+\frac{1}{2}\xi_J^2\alpha_{J-1}^2 h\\ &\quad -\frac{1}{2}\xi_2^2\alpha_1^2 h+\frac{1}{2}\xi_1^2\alpha_2^2 h-\frac{1}{2}\xi_{J-1}^2\alpha_J^2 h,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= \sum_{i=2}^{J-1}\left(\frac{\xi_{i+1}^2-\xi_{i-1}^2}{2}\right)\alpha_i^3 h=\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{J}\xi_i^2\alpha_{i-1}^3 h-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{J-2}\xi_i^2\alpha_{i+1}^3 h\\ &= \sum_{i=2}^{J-1}\frac{\alpha_{i-1}^3-\alpha_{i+1}^3}{2}\xi_i^2 h+\frac{1}{2}\xi_J^2\alpha_{J-1}^3 h-\frac{1}{2}\xi_2^2\alpha_1^3 h-\frac{1}{2}\xi_1^2\alpha_2^3 h+\frac{1}{2}\xi_{J-1}^2\alpha_J^3 h,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_3 &= -\sum_{i=2}^{J-1}(\xi_{i+1}-\xi_{i-1})\xi_i\alpha_i^3 h=-\sum_{i=3}^{J}\xi_i\xi_{i-1}\alpha_{i-1}^3 h+\sum_{i=2}^{J}\xi_i\xi_{i-1}\alpha_i^3 h\\ &= -\sum_{i=2}^{J-1}(\alpha_{i-1}^3-\alpha_i^3)\xi_i\xi_{i-1}h+\xi_1\xi_2\alpha_1^3 h-\xi_J\xi_{J-1}\alpha_{J-1}^3 h,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_4 &= \sum_{i=2}^{J-1}(\xi_{i+1}-\xi_{i-1})\xi_i\alpha_i h=\sum_{i=3}^{J}\xi_i\xi_{i-1}\alpha_{i-1}h-\sum_{i=2}^{J-1}\xi_i\xi_{i-1}\alpha_i h\\ &= \sum_{i=2}^{J-1}(\alpha_{i-1}-\alpha_i)\xi_i\xi_{i-1}h-\xi_1\xi_2\alpha_1 h+\xi_J\xi_{J-1}\alpha_{J-1}h.\end{aligned}$$

注意到 $\xi_J=0$，得

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{4}\Sigma_l &= \sum_{i=2}^{J-1}\left(\frac{\alpha_{i-1}^2+\alpha_{i+1}^2}{2}-\alpha_i^2\right)\xi_i^2 h+\sum_{i=2}^{J-1}\frac{\alpha_{i-1}^3-\alpha_{i+1}^3}{2}\xi_i^2 h\\ &\quad -\sum_{i=2}^{J-1}(\alpha_{i-1}^3-\alpha_i^3)\xi_i\xi_{i-1}h-\sum_{i=2}^{J-1}(\alpha_{i-1}-\alpha_i)\xi_i\xi_{i-1}h+B\\ &= \Sigma_5+\Sigma_6+\Sigma_7+\Sigma_8+B,\\ B &= \frac{1}{2}\alpha_2^2(1+\alpha_2)\xi_1^2 h-\frac{1}{2}\xi_2^2(\alpha_1^2-\alpha_2^3)h\\ &\quad -\frac{1}{2}\xi_{J-1}^2\alpha_J^2(\alpha_J+1)h+\xi_1\xi_2\alpha_1(\alpha_1^2-1)h.\end{aligned}$$

由于 $0\leqslant\alpha_i\leqslant 1$，故 $B\leqslant\frac{1}{2}\alpha_2^2(1+\alpha_2)\xi_1^2 h\leqslant\xi_1^2 h$.

现在依次估计 $\Sigma_j, j=5,6,7,8$：

$$\begin{aligned}\Sigma_5 &= \sum_{i=2}^{J-1}\left(\frac{\alpha_{i+1}^2+\alpha_{i-1}^2}{2}-\alpha_i^2\right)\xi_i^2 h\\ &= \frac{\Delta t}{2}\sum_{i=2}^{J-1}[(g_{i+1}\alpha_{i+1}-g_i\alpha_i)-(g_i\alpha_i-g_{i-1}\alpha_{i-1})]\xi_i^2.\end{aligned}$$

因为 $g_{i+1}\alpha_{i+1}-g_i\alpha_i=(g_{i+1}-g_i)\alpha_{i+1}+g_i(\alpha_{i+1}-\alpha_i)$，由引理及假设(H1)

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{J-1}|g_{i+1}-g_i|\xi_i^2 &\leqslant K_2\sum_{i=2}^{J-1}(h+|w_{i+1}-w_i|)\xi_i^2\\ &\leqslant K_2\sum_{i=2}^{J-1}\xi_i^2 h+K_2\sum_{i=2}^{J-1}|\delta_x\xi_i||\xi_i|^2 h+\sum_{i=2}^{J-1}|\delta_x\bar{Q}_i|\xi_i^2 h\end{aligned}$$

$$\leqslant \widetilde{M}(\|\bar{Q}\|_{1,\infty})\sum_{i=2}^{J-1}\xi_i^2 h + 3K\sum_{i=2}^{J-1}|\delta_z\xi_i||\xi_i|h$$

$$\leqslant \widetilde{M}(\|\bar{Q}\|_{1,\infty})\sum_{i=2}^{J-1}\xi_i^2 h + \varepsilon\sum_{i=2}^{J-1}|\delta_z\xi_i|^2 h.$$

故

$$\sum_{i=2}^{J-1}(g_{i+1}\alpha_{i+1}-g_i\alpha_i)\xi_i^2 \leqslant \sum_{i=2}^{J-1}|g_{i+1}-g_i|\xi_i^2 + 2K_2\sum_{i=2}^{J-1}\xi_i^2 h$$

$$\leqslant \widetilde{M}\sum_{i=2}^{J-1}\xi_i^2 h + \varepsilon_1\sum_{i=2}^{J-1}|\delta_z\xi_i|^2 h.$$

同理

$$\sum_{i=2}^{J-1}(g_i\alpha_i - g_{i-1}\alpha_{i-1})\xi_i^2 \leqslant \widetilde{M}\sum_{i=2}^{J-1}\xi_i^2 h + \varepsilon_2\sum_{i=1}^{J-2}|\delta_z\xi_i|^2 h.$$

从而

$$\Sigma_5 \leqslant \widetilde{M}\sum_{i=2}^{J-1}\xi_i^2 h\Delta t + \varepsilon\sum_{i=1}^{J-1}|\delta_z\xi_i|^2 h\Delta t.$$

利用这种方法，并注意 $|\alpha_i|\leqslant 1$，得

$$\Sigma_5+\Sigma_6+\Sigma_7+\Sigma_8 \leqslant \widetilde{M}\sum_{i=2}^{J-1}\xi_i^2 h\Delta t + \varepsilon\sum_{i=1}^{J-1}|\delta_z\xi|^2 h\Delta t.$$

从而（恢复上标 $n-1$），

$$\sum_{i=2}^{J-1}(\hat{\xi}_i^{n-1})^2 h \leqslant \sum_{i=1}^{J-1}(\xi_i^{n-1})^2 h + O(\|\xi^{n-1}\|^2\Delta t$$

$$+\|\bar{Q}^{n-1}\|_3^2 h^4\Delta t) + \varepsilon\|\delta_z\xi^{n-1}\|^2\Delta t. \tag{3.12}$$

结合(3.3)，(3.8)有

$$\frac{1}{2\Delta t}\sum_{i=1}^{J-1}[(\xi_i^n)^2-(\xi_i^{n-1})^2]h + K_1|[\delta_z\xi^n\|^2$$

$$\leqslant |[\xi^n\|^2 + \widetilde{M}|[\xi^{n-1}]|^2\Delta t^2 + \frac{K_1}{2}|[\delta_z\xi^n\|^2$$

$$+\widetilde{M}\left(\Delta t + \frac{h^4}{\Delta t}\right) + \varepsilon\|\delta_z\xi^{n-1}\|^2, \tag{3.13}$$

上式两端同时乘以 $2\Delta t$，并对 n 求和，利用 Gronwall 引理得

$$|[\xi^n]| + \left(K_1\sum_{i=0}^{N}|[\delta_z\xi^n||^2\Delta t\right)^{1/2} \leqslant \widetilde{M}(\Delta t + h^2), \tag{3.14}$$

其中 $\widetilde{M}$ 与 $n,\Delta t,h$ 无关.

为了证明收敛性，尚需用归纳法证明(H1)当 $m=n$ 时成立. 事实上，由(3.14)式有

$$\max_i|w_i^n| \leqslant \max_i|\bar{Q}_i^n| + \max_i|\xi_i^n| \leqslant K_1 + h^{-1/2}\|\xi_i^n\|$$

$$\leqslant K_1 + \widetilde{M}(\Delta t + h^2)h^{-1/2}. \tag{3.15}$$

因常数 $\widetilde{M}$ 与 $n,\Delta t,h$ 无关，故当 h 足够小时有 $\max\limits_i|w_i^n|\leqslant 2K_1$. 从而假设(H1)对任何 $n\leqslant N$ 成立. 这样，我们得到本文的主要结果：

定理 设问题(2.4)的解 $\bar{Q}\in w^{1,\infty}(L^\infty)\cap L^\infty(H^4)$，$\frac{\partial^2\bar{Q}}{\partial\tau^2}\in L^2(\tilde{l}^2)$，$\{w_i^n\}$ 是基于二次插值的特征—差分格式(2.14)的解，则在条件(H1)，(H2)下，当 h 适当小时，误差 ξ^n 满足(3.14)

给出的收敛阶估计.

4. 非饱和水流问题的数值模拟

本节给出一些非饱和土壤水流问题的数值模拟的例子以说明特征差分法的优点. 不失一般性,不妨取 $S_r=0$. 将非饱和土壤水流问题的特征—差分格式(2.14)写为矩阵方程的形式

$$\begin{cases}Aw^n=F, n=1,\cdots,N,\\ w^0=0.\end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $w^n=(w_0^n,\cdots,w_J^n), n=0,\cdots,N; A=(a_{ij})_{(J+1)\times(J+1)}$,

$$a_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta t}+\dfrac{1}{h^2}(A_{i+\frac12}+A_{i-\frac12}), & j=i,\\ -\dfrac{1}{h^2}A_{i+\frac12}, & j=i+1, i=1,\cdots,J-1,\\ -\dfrac{1}{h^2}A_{i-\frac12}, & j=i-1,\end{cases} \tag{4.2}$$

$$a_{0,0}=\frac{D(w_0^{n-1}+\beta^{n-1})}{h}, a_{0,1}=-\frac{D(w_0^{n-1}+\beta^{n-1})}{h}, a_{J,J}=1.$$

$F=(f_j)_{(J+1)\times 1}, j=0,\cdots,J$, 其中

$$f_j=\begin{cases}q(t^n)-K(w_0^{n-1}+\beta^{n-1}), & j=0,\\ \dfrac{1}{\Delta t}\bar{w}_i^{n-1}, & j=1,\cdots,J-1,\\ 0, & j=J.\end{cases} \tag{4.3}$$

因此,只要给定空间步长 h, 时间步长 k 以及初边值和参数 K_s, b, ψ_s 的值,就可以由(4.1)~(4.3)解出问题(2.14)的特征—差分解,即含水量的数值解.

在陆面及大气环流模式中,将全球土壤作某些典型分类,对各点标定土壤参数类型,按照 Dickinson 等的 BATS 模式文本[3]对 12 种土壤给出参数列表 1. 下面以第 8 种土壤参数为例给出入渗蒸发问题特征—差分解模拟结果. 空间步长取 $h=1$ cm, 时间步长分别取 $k=0.5$ 小和 2 小时,将区域 $\bar{G}=[0,200]$ 分成 200 个相等的单元. 假设在土壤表面 ($z=0$) 保持一段时间的定常入渗通量 $q=0.1\text{cm}/h$, $\beta(t)=0.54\times0.419$, $Q_0(z)=0.54\times0.419$, 则土壤水分入渗和蒸发过程的初始和边界条件为

$$\begin{cases}Q(z,0)=0.54\times0.419, z\in[0,200];\\ q(t)=0.1\text{cm}/h, \text{if } 0<t<450h;\\ q(t)=-0.1\text{cm}/h, \text{if } 450\leqslant t\leqslant 900h;\\ Q(200,t)=0.54\times0.419.\end{cases} \tag{4.4}$$

当 $S_r=0$ 时,将这些数据输入格式(4.1),我们可以分别得到从 0 到 450 小时中每隔 30 小时土壤中的含水量分布图及从 450 到 900 小时中每隔 60 小时土壤中的水分蒸发的含水量分布图. 无论 $t=0.5h$ 还是 $t=2h$, 当入渗开始时刻,地表面层的含水率迅速从 0.226 上升到 0.4 以上. 之后,地表层 $z=0$ 处的含水率变化不大,并逐步接近饱和含水率,但没有达到饱和含水率,不产生径流. 当开始蒸发时,表土的含水率降低. 过一段时间以后,含水率分布曲线逐渐随时间降低. 同时,从表 2,表 3 和表 4 可以看出,时间步长取 $t=0.5h$ 与 $t=2h$ 时含水率相差不大,但取 $t=2h$ 时计算时间上要比 $t=0.5h$ 时要少的多.

表 1 12 种土壤参数

土壤种类/参数	Q_s	$-\psi_s$(mm)	K_s/(mms^{-1})	b	Q_r/Q_s
1	0.33	30	0.2000	3.5	0.088
2	0.33	30	0.0800	4.0	0.119
3	0.39	30	0.0032	4.5	0.151
4	0.42	200	0.0130	5.0	0.266
5	0.45	200	8.9e−3	5.5	0.300
6	0.48	200	6.3e−3	6.0	0.332
7	0.51	200	4.5e−3	6.8	0.378
8	0.54	200	3.2e−3	7.6	0.419
9	0.57	200	2.2e−3	8.4	0.455
10	0.60	200	1.6e−3	9.2	0.487
11	0.63	200	1.1e−3	10.0	0.516
12	0.66	200	0.8e−3	10.8	0.542

表 2 时间步长 $t = 0.5h$ 与 $t = 2h$ 时入渗的含水量比较表

入渗时间(h)	60	180	300	420	60	180	300	420
距离(m)	$t = 0.5h$ 含水量				$t = 2h$ 含水量			
0	0.37865	0.40806	0.42009	0.42667	0.37952	0.40833	0.42824	0.42851
40	0.31657	0.38873	0.40712	0.41626	0.31515	0.38901	0.41833	0.41868
80	0.22626	0.35738	0.39016	0.40350	0.22626	0.35741	0.40616	0.40661
120	0.22626	0.26183	0.36559	0.38693	0.22626	0.24815	0.39025	0.39079
160	0.22626	0.22626	0.31695	0.36144	0.22626	0.22626	0.36540	0.36603
200	0.22626	0.22626	0.22626	0.22626	0.22626	0.22626	0.22626	0.22626

表 3 时间步长 $t = 0.5h$ 与 $t = 2h$ 时蒸发的含水量比较表

入渗时间(h)	480	600	720	840	480	600	720	840
距离(m)	$t = 0.5h$ 含水量				$t = 2h$ 含水量			
0	0.41143	0.38124	0.36794	0.36035	0.40402	0.38367	0.35242	0.36357
40	0.40719	0.37408	0.35858	0.34914	0.40803	0.37440	0.35869	0.34918
80	0.40282	0.36968	0.35390	0.34409	0.40382	0.36998	0.35403	0.34414
120	0.39300	0.36061	0.34490	0.33503	0.39403	0.36091	0.34504	0.33509
160	0.37164	0.34202	0.32700	0.31749	0.37345	0.34230	0.32713	0.31756
200	0.22626	0.22626	0.22626	0.22626	0.22626	0.22626	0.22626	0.22626

表 4 时间步长 $t=0.5h$ 与 $t=2h$ 时运行时间的比较表

入渗时间(h)	运行时间(s)		蒸发时间(h)	运行时间(s)	
	$t=0.5h$	$t=2h$		$t=0.5h$	$t=2h$
0	0	0	480	4.707	2.283
60	0.530	0.130	540	4.857	2.374
120	1.232	0.290	600	5.588	2.824
180	1.632	0.511	660	5.628	3.154
240	2.163	0.531	720	6.329	3.365
300	2.474	1.271	780	6.590	3.565
360	3.655	1.473	840	7.471	3.945
420	4.166	1.933	900	7.571	4.116

参考文献:

[1] Jim Douglas, Thomas Russell F. Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures[J]. SIAM. J. Numer. Anal., 1982, 19(5): 871～885.

[2] 罗振东,谢正辉,朱江,曾庆存. 非饱和水流问题的混合元法及其数值模拟[J]. 计算数学, 2003, 25(1): 113～128.

[3] Thomas Russell F. The stepping along characteristics with incomplete iteration for a galerkin approximation of miscible displacement in porous media[J]. SIAM. J. Numer. Anal., 1985, 22(5): 970～1013.

[4] 由同顺,孙澈. 求解非线性对流—扩散问题的特征差分法[J]. 计算数学, 1991, 13(2): 166～176.

Characteristics Finite Difference Method and Numerical Simulation Based on Quadratic Interpolation for the Unsaturated Soil Water Flow Problem

SONG Li-ye

(*Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100029, *China*)

Abstract: In this paper, a characteristic finite difference method based on quadratic interpolation for an unsaturated soil water flow problem is studied. L^2 - error estimate is derived. Some numerical examples have been given to show the validity of the method.

Key words: Unsaturated soil water flow; Characteristics finite difference; Quadratic interpolation; Error estimate; Numerical simulation